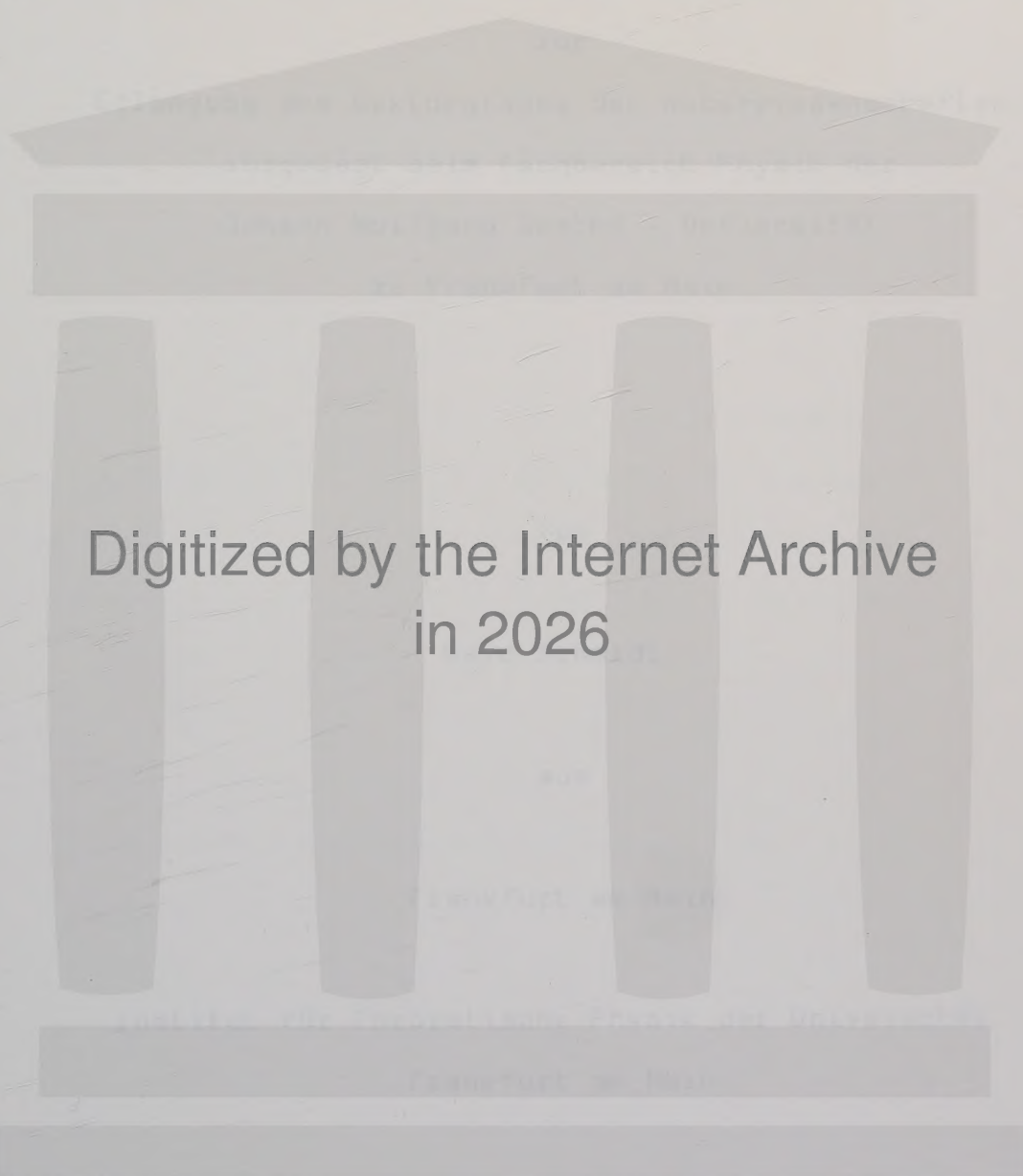


Gerd Schmidt
4^o Diss. Frankfurt a/M.
1984





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550813_0009

Modelle superluminöser stellarer Objekte
mit Quark-Gluon-Plasma-Kern

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
vorgelegt beim Fachbereich Physik der
Johann Wolfgang Goethe - Universität
zu Frankfurt am Main

von

Gerd Schmidt

aus

Frankfurt am Main

Institut für Theoretische Physik der Universität
Frankfurt am Main

Oktober 1983

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik der
Johann Wolfgang Goethe-Universität zu Frankfurt am Main.

Dekan:	Prof. Dr. F. Granzer
Leiter der Arbeit:	Prof. Dr. W. Greiner
Erstgutachter:	Prof. Dr. W. Greiner
Zweitgutachter:	Prof. Dr. J. Rafelski

Tag der mündlichen Prüfung: 8. Februar 1984

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Motivation	6
2. Der Einfluß von Entropie und Baryonenzahl auf die stellare Struktur	10
3. Quark-Gluon-Plasma-Sterne	20
4. Weitere Quantenzahlen: Leptonen, Ladung	45
5. Hadronenhüllen	60
6. Die Rolle der Bag-Konstanten in der Allgemeinen Relativitätstheorie	77
7. Konvektives Gleichgewicht	83
8. Baryonenzerfall induziert durch magnetische Monopole als Energiequelle für Sterne im konvektiven Gleichgewicht. Quasare	93
9. Diskussion der erzielten Ergebnisse	103

10. Ausblick	106
11. Anhang Rotierende Sterne	108
Anhang Thermodynamisches und konvektives Gleichgewicht	111
12. Literaturverzeichnis	115

Abstract

The influence of finite entropy per baryon and nonzero temperature on the structure of stellar objects is investigated. The existence of nondegenerate Quark-Gluon-plasma stars, stable against gravitational collapse, is shown. The properties of the Quark-Gluon stars are similar to those of neutron stars. Radius and maximal mass of the Quark-Gluon stars depend on the Bag constant. For a given Bag constant $B=(145 \text{ MeV})^4$ the maximal mass is $M \approx 2 M_0$ at a radius $R \approx 11 \text{ km}$. Assuming that the Quark-Gluon plasma is the core of a giant convective star and taking into account the magnetic monopoles, having the property of catalysing baryon decay, a stellar object similar a Quasar can be described. The essential parameter distinguishing different Quasars is the entropy per baryon ratio. Fitting one observable by suitable choice of the specific entropy all other observables can be calculated and give viable results compared to the known experimental data such as luminosity, total energy content, size and spectrum. The primary energy source of the quasars is the monopole catalysed baryon burning, converting rest mass totally into energy.

1. Motivation

Trotz der in den letzten Jahren erzielten Fortschritte in der Physik gibt es noch viele zur Zeit unverstandene Phänomene und Beobachtungen, welche einer Erklärung bedürfen. Zu diesen zählen auch die Quasare, welche sich uns als gewaltige Energiequellen aus der Frühzeit des Universums präsentieren. In der vorliegenden Arbeit werde ich versuchen, im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie und der jüngsten Erkenntnisse der Elementarteilchenphysik zu einer befriedigenden Erklärung der Quasare zu gelangen.

Anschaulich sind aus heutiger Sicht stark wechselwirkende Elementarteilchen Blasen im wahren Vakuum, welche je ein Quark und ein Antiquark (Mesonen) oder drei Quarks (Baryonen) sowie Gluonen enthalten. Damit sind die Quarks und Gluonen die eigentlich elementaren Bestandteile der Hadronen. In der Quantenchromodynamik (QCD) werden die Wechselwirkungen zwischen Quarks und Gluonen beschrieben. Die Blase, welche Quarks und Gluonen einschließt, wird Bag genannt. Das Medium innerhalb des Bags, das sogenannte perturbative Vakuum, besitzt selbst physikalische Eigenschaften wie Energiedichte und Druck. Isolierte Quarks können nur innerhalb eines Bags existieren; diese Eigenschaft bezeichnet man als "confinement".

Die Tatsache, daß das Medium innerhalb eines Bags eigene physikalische Qualitäten besitzt, eröffnet äußerst



interessante Möglichkeiten im Rahmen der Gravitationstheorie Einsteins. Da das Medium Bag in die Einstein - Gleichungen wie die kosmologische Konstante eingeht, allerdings mit mindestens 10^{45} - facher Stärke, eröffnen sich völlig neue Perspektiven im Bereich der Kosmologie, des frühen Universums und des Sternbaus.

In den Grand Unified Theories wird der Versuch unternommen, die starke und die elektroschwache Wechselwirkung in einer einheitlichen Theorie zu beschreiben. Dabei kommt notwendigerweise ein weiteres Teilchen ins Spiel, der magnetische Monopol. Obwohl der magnetische Monopol in der klassischen Elektrodynamik nicht verboten ist, ist er aber auch nicht notwendig im Gegensatz zu den Grand Unified Theories. Die von diesen Theorien vorhergesagte und zur Zeit experimentell überprüfte endliche Lebensdauer der Protonen führt zur Nichterhaltung der Baryonenzahl. Der magnetische Monopol besitzt die Eigenschaft, innerhalb eines Bags Quarks in Antiquarks zu verwandeln, welche dann mit anderen in Bag befindlichen Quarks zerstrahlen können und letztlich Protonen in Energie verwandeln. Dieser durch Monopole induzierte Baryonenzerfall ist als Energiequelle weit effektiver als die Kernfusion, welche maximal 0,7% der Ruhemasse in Energie verwandeln kann, und damit besonders interessant bei astrophysikalischen Objekten, welche einen hohen Energieausstoß aufweisen.

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Bild : Mit einem Riesenbag, welcher Quarks, Gluonen und magnetische Monopole enthält, steht einerseits eine hochwertige Energiequelle zur Verfügung, andererseits besitzt die Raum-Zeit neue Qualitäten.

Bei der Untersuchung dieser Objekte beginne ich mit dem generellen Einfluß von Entropie und Baryonenzahl auf die stellare Struktur ausgehend von einem Variationsprinzip, um volle Allgemeinheit zu sichern. Im dritten Kapitel werden reine Quark-Gluon-Plasma-Sterne und ihre Eigenschaften untersucht und im darauffolgenden Kapitel werden weitere Quantenzahlen in die Untersuchung mit eingeschlossen. Im nächsten Kapitel werden verschiedene Ansätze für hadronische Materie diskutiert, welche den Riesenbag umhüllen könnten. Das nächste Kapitel diskutiert die Rolle der Bag-Konstanten in der Allgemeinen Relativitätstheorie und der Kosmologie; dabei ergeben sich auch obere Schranken für statische Riesenbags. Die vorangegangenen Kapitel befassen sich mit Objekten im thermodynamischen Gleichgewicht; dagegen ist der Normalfall bei gewöhnlichen heißen Sternen und planetaren Atmosphären das konvektive Gleichgewicht. Das thermodynamische Gleichgewicht schließt zwar das konvektive Gleichgewicht ein, die Umkehrung gilt jedoch nicht. Dies eröffnet eine weitere Klasse von Objekten, welche im siebten Kapitel behandelt werden. Durch Einschluß der magnetischen Monopole in den Stern ergeben sich superluminöse Objekte, welche im achten Kapitel untersucht

werden. Danach wird der mögliche Einfluß der bisher vernachlässigten Größen diskutiert. Die Arbeit wird abgeschlossen durch einen Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit den experimentellen Beobachtungen und einen Ausblick auf zukünftige Forschungsrichtungen.

2. Der Einfluß von Entropie und Baryonenzahl auf die stellare Struktur

Da Sterne im allgemeinen endliche Temperaturen besitzen, ist es nicht nur von theoretischem Interesse, den Einfluß von endlicher Entropie pro Baryon auf den Sternbau zu untersuchen. Die Struktur eines massereichen Objekts wird einerseits durch die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie bestimmt, andererseits durch die Zustandsgleichung der das Objekt aufbauenden Materie, welche in den Energie-Impuls-Tensor eingeht.

$$R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = - 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Um diese Zustandsgleichung aufzustellen, müssen die thermodynamischen Eigenschaften der Materie bekannt sein. Diese werden vollständig beschrieben durch das großkanonische Potential $\Omega(\mu, \beta=1/T, V)$ der den Stern aufbauenden Konstituenten. Das großkanonische Potential hängt ab vom chemischen Potential μ , der Temperatur T (bzw. der inversen Temperatur $\beta=1/T$) und dem Volumen V . T und μ sind Lagrange-Parameter, welche die Erhaltung der Energie und der Teilchenzahl im Mittel garantieren; V ist ein Einheitsvolumenelement im Zentrum eines frei fallenden Koordinatensystems, in welchem die Raum-Zeit flach ist und daher die Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie und der Thermodynamik gültig sind.

Die Gesamtteilchenzahl N , die Gesamtentropie S , der Druck p und die Gesamtenergie E sind dann gegeben durch:

$$N = - \frac{\partial \Omega(\mu, \beta, T)}{\partial \mu} \quad (2a)$$

$$S = - \frac{\partial \Omega(\mu, \beta, T)}{\partial T} \quad (2b)$$

$$p = - \frac{\partial \Omega(\mu, \beta, T)}{\partial V} \quad (2c)$$

$$E = \frac{\partial(\beta \Omega)}{\partial \beta} - \mu \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \quad (2d)$$

Gleichung (2d) ist zugleich die Legendre-Transformation vom großkanonischen Potential $\Omega(\mu, T, V)$ zur Energie $E(N, S, V)$.

$$E(N, S, V) = TS + \mu N + \Omega \quad (2d')$$

Die korrespondierenden Dichten sind wie folgt definiert:

$$\text{Energiedichte } \rho = E/V \quad (3a)$$

$$\text{Teilchenzahldichte } n = N/V \quad (3b)$$

$$\text{Entropiedichte } s = S/V \quad (3c)$$

Diese Dichten sind unabhängig vom Volumen, da im allgemeinen das großkanonische Potential Ω proportional zum Volumen ist.

$$\Omega(\mu, T, V) = - V p(\mu, T) \quad (4)$$

Bei Prozessen, in welchen dies nicht der Fall ist, handelt es sich um lokale Effekte, die jedoch solange in den allgemeinrelativistischen Rechnungen enthalten sind, solange die daran beteiligten Teilchen keine Abweichung der Geometrie von der Minkowski-Raum-Zeit spüren. Das in speziellen Fällen zu berücksichtigende Einheitsvolumen ist somit durch die Gezeitenkräfte nach oben beschränkt.

Zusammen mit den Gleichungen (3a-3c) und (4) läßt sich Gleichung (2d') umformen :

$$\rho = Ts + \mu n - p \quad (3d)$$

Die Variation der Energiedichte ρ nach der Teilchenzahl-dichte n und der Entropiedichte s ist dann gegeben durch:

$$\delta\rho = \delta(E/V) = \delta E/V - E/V \delta V/V$$

Wegen $E = E(N, S, V) = TS + \mu N - pV$ gilt :

$$\delta E = T \delta S + \mu \delta N - p \delta V$$

$$\delta(S/V) = \delta S/V - S/V \delta V/V$$

$$\delta(N/V) = \delta N/V - N/V \delta V/V$$

$$\delta(E/V) = \delta E/V - E/V \delta V/V$$

$$\begin{aligned} \underline{\delta p} &= \delta(E/V) = \delta E/V - E/V \delta V/V \\ &= T/V \delta S + \mu/V \delta N - p/V \delta V \\ &\quad - TS/V \delta V/V - \mu N/V \delta V/V + p \delta V/V \\ &= T \delta(S/V) + \mu \delta(N/V) \\ &= \underline{T \delta s + \mu \delta n} \end{aligned} \quad (5)$$

Da p eine Funktion von μ und T ist, wird die Ableitung des Drucks nach einem beliebigen Parameter x gegeben durch:

$$\begin{aligned} dp/dx &= \partial p / \partial \mu \, d\mu/dx + \partial p / \partial T \, dT/dx \\ &= n \, d\mu/dx + s \, dT/dx \end{aligned} \quad (6)$$

Den Einfluß von Entropie und Baryonenzahl auf den Sternbau berücksichtige ich nun durch das folgende Variationsprinzip:

Bei einer gegebenen Gesamtteilchenzahl N_0 und einer gegebenen Gesamtentropie S_0 soll die von außen beobachtete Masse M_∞ ihren extremalen Wert annehmen, d.h. die Variation soll verschwinden.

$$\delta(M_\infty + l_1 N_0 + l_2 S_0) = 0 \quad (7)$$

l_1 und l_2 sind die üblichen Lagrange-Multiplikatoren. Die Teilchenzahl N_0 und die Entropie S_0 ergeben sich durch Integration der korrespondierenden Dichten über das echte dreidimensionale Raumvolumen, während sich die Masse M_∞ aus der Metrik berechnen läßt.

Um die Variation konkret durchzuführen, muß ich einen Ansatz für die allgemeine Form der Metrik machen. Zur Vereinfachung nehme ich an, daß das System statisch und sphärisch symmetrisch ist. Die allgemeine Form der Metrik lautet dann:

$$ds^2 = e^{v(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (8a)$$

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2M(r)}{r} \quad (8b)$$

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr \quad (8c)$$

$$v'(r) = 2 \frac{M + 4\pi p r^3}{r(r-2M)} \quad (8d)$$

Mit dieser Metrik ergeben sich für N_0 und S_0

$$N_0 = 4\pi \int n(r) \exp(\lambda(r)/2) r^2 dr \quad (9)$$

$$S_0 = 4\pi \int s(r) \exp(\lambda(r)/2) r^2 dr \quad (10)$$

und für die gesamte von einem äußeren Beobachter gemessene Masse

$$M_\infty = 4\pi \int \rho(r) r^2 dr \quad (11)$$

Eingesetzt in Gleichung (7) erhalte ich :

$$\delta \left(4\pi \int_0^\infty s(r) r^2 dr + l_1 4\pi \int_0^\infty n(r) e^{\frac{\lambda(r)}{2}} r^2 dr + l_2 4\pi \int_0^\infty s(r) e^{\frac{\lambda(r)}{2}} r^2 dr \right) = 0$$

$$4\pi \left[\int_0^\infty \delta s(r) r^2 dr + l_1 \int_0^\infty \delta n(r) e^{\frac{\lambda(r)}{2}} r^2 dr + l_1 \int_0^\infty n(r) \delta \left(e^{\frac{\lambda(r)}{2}} \right) r^2 dr \right. \\ \left. + l_2 \int_0^\infty \delta s(r) e^{\frac{\lambda(r)}{2}} r^2 dr + l_2 \int_0^\infty s(r) \delta \left(e^{\frac{\lambda(r)}{2}} \right) r^2 dr \right] = 0$$

$$4\pi \left[\int_0^\infty (T \delta s + \mu \delta n) r^2 dr + \int_0^\infty (l_1 \delta n + l_2 \delta s) e^{\frac{\lambda}{2}} r^2 dr \right. \\ \left. + \int_0^\infty (l_1 n + l_2 s) \left[\frac{1}{r} e^{\frac{3\lambda}{2}} 4\pi \int_0^r \delta s(r') r'^2 dr' \right] r^2 dr \right] = 0$$

Partielle Integration des dritten Terms liefert:

$$4\pi \left[\int_0^\infty (T\delta s + \mu\delta n) r^2 dr + \int_0^\infty (\ell_1 \delta n + \ell_2 \delta s) e^{\frac{\lambda}{2}} r^2 dr \right. \\ \left. - \int_0^\infty \delta s r^2 dr \left\{ 4\pi \int_0^r (\ell_1 n + \ell_2 s) e^{\frac{3\lambda}{2}} r' dr' \right\} dr \right] = 0$$

$$4\pi \left[\int_0^\infty (T\delta s + \mu\delta n) r^2 dr + \int_0^\infty (\ell_1 \delta n + \ell_2 \delta s) e^{\frac{\lambda}{2}} r^2 dr \right. \\ \left. - \int_0^\infty (T\delta s + \mu\delta n) r^2 \left\{ 4\pi \int_0^r (\ell_1 n + \ell_2 s) e^{\frac{3\lambda}{2}} r' dr' \right\} dr \right] = 0$$

$$4\pi \left[\int_0^\infty \left\{ 1 - 4\pi \int_0^r (\ell_1 n + \ell_2 s) e^{\frac{3\lambda}{2}} r' dr' \right\} (T\delta s + \mu\delta n) r^2 dr \right. \\ \left. + \int_0^\infty (\ell_1 \delta n + \ell_2 \delta s) e^{\frac{\lambda}{2}} r^2 dr \right] = 0$$

Da die Variationen bezüglich n und s unabhängig sind, erhalte ich zwei unabhängige Integralgleichungen :

$$[1 - 4\pi \int (\ell_1 n(r') + \ell_2 s(r')) e^{\frac{3}{2}\lambda(r')} r' dr'] \mu + \ell_1 e^{\frac{1}{2}\lambda(r)} = 0 \quad (12)$$

$$[1-4\pi(l_1 n(r') + l_2 s(r')) e^{\frac{3}{2}\lambda(r')} r' dr'] T + l_2 e^{\frac{4}{2}\lambda(r)} = 0 \quad (13)$$

Dies sind die beiden gesuchten Gleichungen, welche die Struktur der Sterne vollständig bestimmen. In beiden Gleichungen sind jedoch noch die beiden Lagrange-Multiplikatoren, welche die globalen Zahlenwerte für N_0 und S_0 garantieren, enthalten. Diese sind jedoch nicht unbedingt notwendig, da das Variationsproblem auch umgekehrt aufgefaßt werden kann und somit zu einer gegebenen Masse die Entropie und die Teilchenzahl berechnet werden kann.

Division von Gleichung (12) durch Gleichung (13) führt zu folgender Beziehung :

$$\frac{T}{\mu} = \frac{l_2}{l_1} = \text{konstant} \quad (14)$$

Daraus folgt, daß über den gesamten Stern das Verhältnis zwischen T und μ einen festen Wert besitzt, welcher charakteristisch für das gesamte Objekt ist und unabhängig von der Struktur. Da die Lagrange-Multiplikatoren mit den externen Zwangsbedingungen N_0 und S_0 verknüpft sind, legen umgekehrt diese Größen das Verhältnis T/μ fest.

Auflösen der beiden Gleichungen (12) und (13) nach den Lagrange-Multiplikatoren liefert :

$$l_1 = \frac{\mu}{-e^{\frac{\lambda}{2}} + 4\pi \left(T \int_0^R s e^{\frac{3\lambda}{2}} r' dr' + \mu \int_0^R n e^{\frac{3\lambda}{2}} r' dr' \right)} \quad (15)$$

$$l_2 = \frac{T}{-e^{\frac{\lambda}{2}} + 4\pi \left(T \int_0^r s e^{\frac{\lambda}{2}} r' dr' + \mu \int_0^r n e^{\frac{\lambda}{2}} r' dr' \right)} \quad (16)$$

Da die jeweils linke Seite jeder Gleichung von r unabhängig ist, ist es die rechte auch. Differenziere ich daher die Gleichungen nach r , so fallen die Konstanten l_1 und l_2 heraus und ich erhalte unter Berücksichtigung der Beziehung $T/\mu = \text{konst.}$ und Gleichung (3d) die folgenden Gleichungen :

$$\frac{1}{T} \frac{dT(r)}{dr} = - \frac{M(r) + 4\pi p(r)r^3}{r^2} e^{\frac{\lambda(r)}{2}} \quad (17)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu(r)}{dr} = - \frac{M(r) + 4\pi p(r)r^3}{r^2} e^{\frac{\lambda(r)}{2}} \quad (18)$$

Nach Multiplikation von Gleichung (17) mit sT und von Gleichung (18) mit μn führt die Addition beider Gleichungen zu einer Beziehung, welche in der Allgemeinen Relativitätstheorie als Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung¹ bekannt ist:

$$\frac{dp(r)}{dr} = - \frac{(p(r) + \rho(r)) (M(r) + 4\pi p(r)r^3)}{r (r - 2M(r))} \quad (19)$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall geht Gleichung (19) über in Newtons Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts. Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung kann

auch direkt aus den Einstein-Gleichungen (1) abgeleitet werden. Daher ist Gleichung (19) ein überraschendes Resultat, da ich ja extra von einem Variationsprinzip ausgegangen bin, um die Effekte von endlicher Entropie und endlicher Baryonenzahl auf die stellare Struktur zu finden. Obwohl also in der Ausgangsgleichung Entropie und Teilchenzahl explizit enthalten sind, genügt zur Lösung der resultierenden Gleichung (19) die Kenntnis der Zustandsgleichung, d.h. der Abhängigkeit des Drucks p von der Energiedichte ρ , um Masse M_∞ , Radius R und Metrik $g_{\mu\nu}$ des Sterns zu berechnen. Somit ist der Einfluß von Temperatur und Entropie sowie chemischem Potential und Teilchenzahl auf die stellare Struktur nicht direkt sichtbar. Die Integration der Gleichungen (9) und (10) kann ich nach Lösung der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung durchführen und damit Gesamtteilchenzahl N_0 und Gesamtentropie S_0 erhalten, ohne auf die Metrik und damit den Stern rückzuwirken.

Bei der konkreten Berechnung der in dieser Arbeit im folgenden vorgestellten stellaren Modelle gehe ich von einer großkanonischen Verteilungsfunktion $\mathcal{Q}$ aus, leite unter Berücksichtigung der Bedingung $T/\mu = \text{konstant}$ die Zustandsgleichung $p = p(\rho)$ sowie die Entropiedichte s und die Teilchenzahldichte n her und löse die TOV-Gleichung mit verschiedenen Anfangsbedingungen $\rho(0)$.

3. Quark-Gluon-Plasma-Sterne

Bei irdischen Experimenten könnte ein Quark-Gluon-Plasma, d.h. ein Bag, welcher bei endlicher Temperatur eine Vielzahl von Quarks, Antiquarks und Gluonen einschließt, bei relativistischen Schwerionenkollisionen ² gebildet werden. Die dazu notwendigen Bedingungen wie hohe Energiedichte, Teilchenzahldichte, Temperatur und Druck sind aber auch im Zentrum eines Neutronensterns und in der Frühphase des Universums nach dem Urknall anzutreffen. Während aber bei Schwerionenkollisionen die Lebensdauer des sich möglicherweise bildenden Quark-Gluon-Plasmas beschränkt ist aufgrund der Expansion des heißen Plasmas und des anschließenden Zerfalls in kleinere Bags, d.h. der Fragmentation in Elementarteilchen, hält die Gravitation bei massereichen Objekten den Bag zusammen. Daher beginne ich die Diskussion stellarer Objekte mit Quark-Gluon-Plasma-Kern mit den reinen Quark-Gluon-Plasma-Sternen und erweitere diese Sterne in den nächsten Kapiteln mikroskopisch durch Berücksichtigung weiterer Elementarteilchen, welche zusätzliche Quantenzahlen tragen, und makroskopisch durch Hüllen stellarer Materie verschiedener Zusammensetzung, welche den Quark-Gluon-Kern einschließen.

Analog zum MIT-Bag-Modell ³ ist ein Quark-Gluon-Stern ein Riesenbag, welcher eine große Anzahl freier Quarks, Antiquarks und Gluonen enthält. Die Gesamtzahl

der Quarks N_q minus der Gesamtzahl der Antiquarks $N_{\bar{q}}$ ist genau dreimal die Baryonenzahl N_b der ursprünglichen Materie, aus welcher sich das Quark-Gluon-Plasma bildete.

$$N_q - N_{\bar{q}} = 3 N_b \quad (20)$$

Der Druck der Quarks und Gluonen balanciert den Druck des wahren Vakuums an der Oberfläche des Bags; der resultierende Gesamtdruck ist Null. Dies definiert den Radius des Bags und damit den Rand R des Sterns.

$$p(r=R) = 0 \rightarrow R$$

Das großkanonische Potential Ω für Quark und Antiquarks, deren Ruhemasse gegenüber dem chemischen Potential oder der Temperatur vernachlässigbar ist, ist einschließlich der Gluonen gegeben durch ⁴ :

$$\begin{aligned} \Omega(\mu_q, T, V) = & -BV - V \left[\frac{1}{2\pi^2} \left(1 - \frac{2\alpha_s}{\pi} \right) \mu_q^4 + \right. \\ & \left. \left(1 - \frac{2\alpha_s}{\pi} \right) \mu_q^2 T^2 + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{37}{15} - \frac{22}{3} \frac{\alpha_s}{\pi} \right) T^4 \right] \end{aligned} \quad (21)$$

Das großkanonische Potential des Quark-Gluon-Plasmas ist proportional V und besitzt damit die in Gleichung (4) geforderte Struktur $\Omega = -pV$. Die Konstante α_s ist die

effektive Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung $\alpha_s = g^2/(4\pi)$ und als solche selbst vom Impuls der an der Wechselwirkung beteiligten Teilchen abhängig. Diese effektive Temperaturabhängigkeit werde ich vernachlässigen, da erstens Ω selbst nur bis einschließlich erster Ordnung in α_s berechnet ist ⁵ und zweitens alle die stellare Struktur betreffenden Größen von α_s praktisch unabhängig sind, wie später zu sehen sein wird, so daß eine explizite Berücksichtigung der Temperatur- bzw. Impulsabhängigkeit der Kopplungskonstanten α_s den enormen Aufwand nicht rechtfertigt. Das chemische Potential μ_q der Quarks beträgt ein Drittel des chemischen Potentials der Baryonen $\mu_b = 3 \mu_q$, da jedes Baryon aus drei Quarks zusammengesetzt ist. Die MIT-Bag-Konstante B , deren Berechnung auf rein theoretischem Wege bisher nicht gelungen ist, wird mittels experimenteller Daten gefittet und führt zu Werten zwischen $B = (145\text{MeV})^4$ und $B = (210\text{MeV})^4$. Falls nicht explizit ein anderer Wert für B angegeben ist, werde ich bei den numerischen Ergebnissen, welche ich in dieser Arbeit präsentieren werde, stets den durch Fit des Massenspektrums ^{6,7} gewonnenen Wert verwenden.

$$B = (145 \text{ MeV})^4 = 57.5 \text{ MeVfm}^{-3} = 7.61 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-2}$$

Zur Vereinfachung definiere ich folgende Konstanten :

$$c_1 = \frac{1}{2\pi^2} \left(1 - \frac{2\alpha_s}{\pi} \right)$$

$$c_2 = \left(1 - \frac{2\alpha_s}{\pi} \right)$$

$$c_3 = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{57}{15} - \frac{22}{3} \frac{\alpha_s}{\pi} \right)$$

Durch Differenzieren von Ω nach den Variablen μ , T und V ist es nun möglich, die thermodynamischen Größen n , s , p und ρ zu berechnen. Dabei ist n die echte Ladungsdichte, d.h. die Differenz zwischen der Zahl der Quarks und der Antiquarks.

$$p_q(\mu_q, T) = c_1 \mu_q^4 + c_2 \mu_q^2 T^2 + c_3 T^4 - B \quad (22a)$$

$$s_q(\mu_q, T) = 2c_2 \mu_q^2 T + 4c_3 T^3 \quad (22b)$$

$$n_q(\mu_q, T) = 4c_1 \mu_q^3 + 2c_2 \mu_q T^2 \quad (22c)$$

$$\rho_q(\mu_q, T) = 3c_1 \mu_q^4 + 3c_2 \mu_q^2 T^2 + 3c_3 T^4 - B \quad (22d)$$

Die Baryonenzahldichte ist dann entsprechend Gleichung (20) gegeben durch $n_b = 1/3 n_q$. Gleichung (22d) läßt sich umschreiben zur Zustandsgleichung des Quark-Gluon-Plasmas :

$$\rho_q = 3p_q + 4B \quad (23)$$

$$p_q = \frac{\rho_q - 4B}{3} \quad (23')$$

Daraus folgt, daß p nur eine Funktion von ρ ist. Setze ich daher die für das Quark-Gluon-Plasma erhaltene Zustandsgleichung (23) in die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung (19) ein, so läßt sich diese zusammen mit Gleichung (8d) integrieren und der Verlauf des Drucks in Abhängigkeit von der radialen Koordinate r berechnen.

Der Oberflächenradius R des Quark-Gluon-Sterns folgt dann aus $p(R) = 0$ und die asymptotische Masse M_∞ aus $M(R) = M_\infty$. Diese resultierenden Größen hängen von den Anfangsbedingungen ab, mit denen bei $r = 0$ gestartet wird. Die beiden benötigten Anfangsbedingungen betreffen die zentrale Dichte $\rho(0)$ bzw. den zentralen Druck $p(0)$, welche über die Zustandsgleichung verknüpft sind, und die zentrale Masse $M(0)$. Wie allgemein üblich setze ich

$$M(0) = 0$$

und $\rho(0)$ dient als Parameter, welcher den dazugehörigen Stern (M_∞, R) charakterisiert.

Bevor ich nun die numerischen Lösungen der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung mit der Zustandsgleichung des Quark-Gluon-Plasmas präsentiere, ist es nützlich, daß Verhalten der Lösungen am Ursprung $r \rightarrow 0$ zu diskutieren.

$$M' = 4\pi(3p+4B)r^2 \qquad M(0) = 0 \qquad (24)$$

$$p' = - \frac{4(M+4\pi pr^3)(p+B)}{r(r-2M)} \qquad p(0) = p_0 \qquad (25)$$

Für p mache ich einen Potenzreihenansatz :

$$p = \sum a_n r^n$$

Nach Einsetzen dieses Ansatzes in die Gleichungen (24) und (25) liefert ein Koeffizientenvergleich zwei physikalisch verschiedene Lösungstypen am Ursprung, eine Lösung mit divergierendem zentralen Druck und eine Schar von Lösungen charakterisiert durch den zentralen Druck. Zur Unterscheidung zwischen den beiden Lösungen werde ich alle Größen, welche zur Lösung mit divergierendem zentralen Druck gehören, durch **Fettdruck** kennzeichnen. Der Koeffizientenvergleich liefert explizit :

$$p = \frac{1}{56\pi} \frac{1}{r^2} - \frac{20}{21} B + \frac{160}{1071} \pi B^2 r^2 + \frac{23552}{44523} \pi B^3 r^4 + \frac{82272256}{40115223} \pi B^4 r^6 + \dots \quad (26a)$$

$$p = p_0 - \frac{32\pi}{3} (p_0 + B) \left(\frac{3}{2} p_0 + B \right) r^2 + \dots \quad (26b)$$

Die Lösung (26a) ist analog der exakten Lösung der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung für ein ultrarelativistisches Gas bzw. Strahlung ⁸.

$$\rho = 3p \quad p(r) = 1/(56\pi r^2) \quad M(r) = 3/14 r \quad (27)$$

Dieser reine Strahlungstern besitzt jedoch im Gegensatz zum Quark-Gluon-Plasma-Stern keinen Rand, da $p(r)$ für alle endlichen Werte von r ungleich Null ist.

Setze ich nun in Gleichung (26a) den Wert von B in geometrischen Einheiten ein, so erhalte ich eine Reihe, deren Glieder schnell konvergieren.

$$p = 5,68411 \cdot 10^{-3} r^{-2} - 7,2836 \cdot 10^{-11} + 2,74505 \cdot 10^{-21} r^2 + 2,33534 \cdot 10^{-30} r^4 + 2,17538 \cdot 10^{-39} r^6 + \dots \quad (28)$$

Die Nullstelle des Drucks p liegt bei $R = 8846,7$ m und die Masse des Sterns folgt aus Gleichung (24) zu $M_\infty = M(R) = 2150,5$ m = $1,45 M_0$.

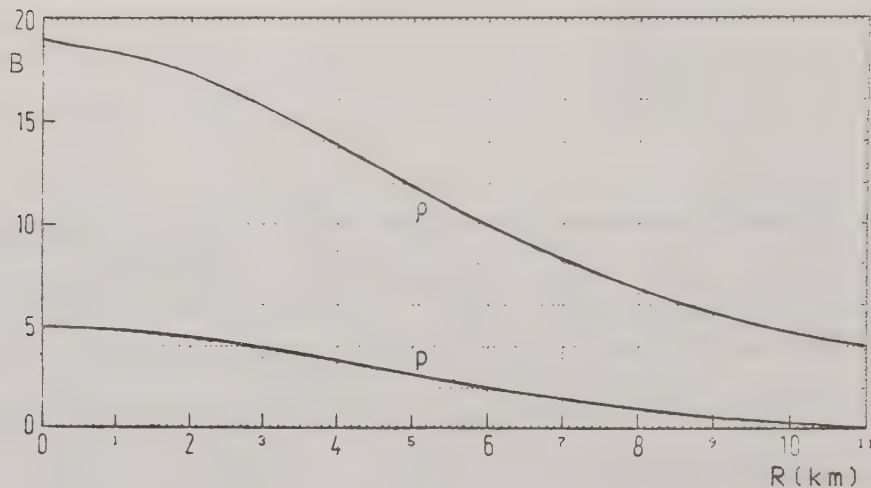
Die Rotverschiebung z an der Oberfläche R einer Masse M ist gegeben durch :

$$z = e^{\frac{\nu}{2}} - 1 = e^{\frac{\lambda}{2}} - 1 = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{R}\right)} - 1 \quad (29)$$

$$z(R) = 0,3951 = 39,51\%$$

Die Schar der im Ursprung regulären Lösungen habe ich numerisch ausgewertet. Als Beispiel für eine solche Lösung ist in Figur 1 der Verlauf des Drucks und der Energiedichte eines typischen Quark-Gluon-Plasma-Sterns mit einer zentralen Energiedichte von $\rho(0) = 19$ B gezeigt. Druck und Energiedichte fallen monoton vom Zentrum zum Rand ab. Der Druckverlauf am Rand ist ziemlich

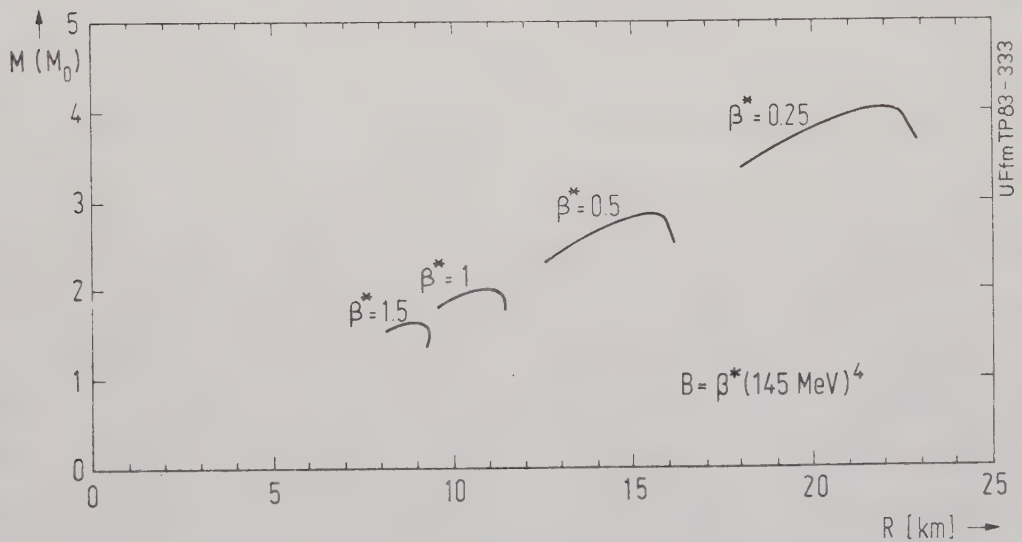
flach, während die Energiedichte gerade um $\rho = 4B$ springt, jenem Wert, um den sich die Energiedichte des perturbativen Vakuums im Bag von derjenigen des wahren Vakuums im Außenraum unterscheidet.



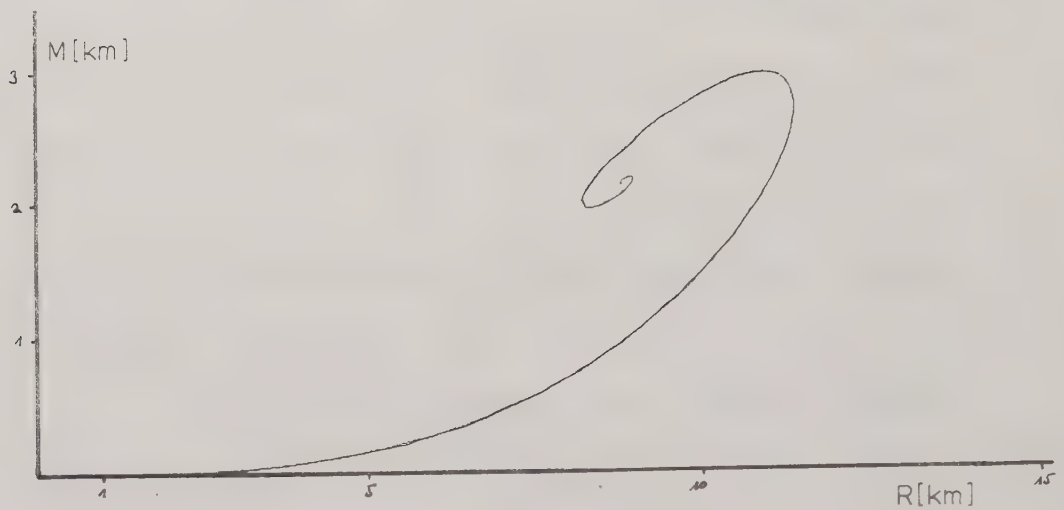
Figur 1

Für jeden Anfangswert $\rho(0) > 4B$ errechnet sich eine dazugehörige Masse M_∞ und ein Radius R . Dieses Masse-Radius-Diagramm ist in Figur 2 für verschiedene Bag-Konstanten und in Figur 3 für die spezielle Wahl $B = (145 \text{ MeV})^4$ gesondert über den erweiterten Dichtebereich $4,001 B \leq \rho(0) \leq 10000 B$ dargestellt. Aus Figur 2 ist ersichtlich, daß Masse und Radius proportional dem Reziproken

der Bag-Konstanten sind. Anschaulich ist dieses Verhalten auch zu erwarten, da mit wachsender Bag-Konstante der Druck des Vakuums wächst und deshalb der Rand des Sterns bereits bei geringerem Radius erreicht wird und ebenso mit kleinerer Bag-Konstante der Stern weiter ausgedehnt werden kann, bevor der Druck auf den Bag-Druck absinkt. Außerdem folgt aus der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung, daß der Druckabfall, d.h. die Ableitung des Drucks nach der radialen Koordinate, mit größerer Bag-Konstante schneller erfolgt.



Figur 2



Figur 3

Anhand des Masse-Radius Diagramms lassen sich die stabilen und die instabilen Lösungen unterscheiden, d.h. negative und positive zweite Variation nach ρ erkennen. Von kleinen zentralen Dichten kommend steigt zunächst die Masse an und der Radius wächst ebenfalls. Schließlich verringert sich der Radius wieder, obwohl die Masse weiter zunimmt; die Sterne werden relativistisch. Bei einer bestimmten Dichte erreicht die Masse ihren maximalen Wert; es gibt keine stationäre Konfiguration mit größerer Masse. Eine weitere Dichteerhöhung im Zentrum führt zu einer Verkleinerung von Masse und Radius und schließlich zu einem Spiralen der Masse-Radius-Kurve um den Punkt, welcher der im Zentrum divergierenden Lösung zugeordnet ist und den ich bereits analytisch gefunden habe.

Dichten unterhalb der maximalen Dichte führen zu stabilen Lösungen; Dichten oberhalb zu instabilen Lösungen. Zum Beweis betrachte ich einen Stern, welcher sich auf dem stabilen Ast befindet und dessen Radius durch eine Störung verringert (vergrößert) wird. Da seine Masse dabei praktisch konstant bleibt, steigt (fällt) die Dichte. Bei dieser neuen sich einstellenden Dichte wird jedoch eine größere (kleinere) Masse als vorhanden benötigt, um zu einem hydrodynamischen Gleichgewicht zwischen materiellem Druck und Gravitationsdruck zu gelangen, d. h. der Materiedruck (Gravitationsdruck) wird den Gravitationsdruck (Materiedruck) übersteigen und somit den Radius vergrößern (verkleinern). Dadurch wird der Störung entgegengewirkt und diese kompensiert. Bei Sternen oberhalb der maximalen Masse überwiegt der Gravitationsdruck bei Verringerung des Radius und der Stern kollabiert bzw. bei Vergrößerung des Radius überwiegt der Materiedruck und der Stern expandiert bis zum stabilen Ast. Oberhalb der maximalen Masse ist die zweite Variation stets positiv ^{9,10,11} und es gibt keine stabile stationäre Lösung mehr. Diejenige Dichte, bei welcher die maximale Masse erreicht wird und damit der letzte stabile Stern, liegt bei den von mir betrachteten Werten der Bag-Konstanten zwischen 20 B und 21,2 B. Dies scheint ein Hinweis auf eine Stabilitätsgrenze, welche ich im folgenden näherungsweise herleiten werde.

Ausgehend von der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung und einer Lösung $p(r)$, M_∞ , R untersuche ich durch Störungsrechnung, wie sich eine zweite Lösung, welche sich von der ersten durch einen geringfügig veränderten Radius unterscheidet, verhält. Falls diese Störung des stellaren Radius exponentiell anwächst, war die ursprüngliche Lösung instabil.

$$r = r_0 (1 + \varepsilon) ; \quad m = m_0$$

$$p'_0 = - \frac{m_0 p_0}{r_0^2} \left(1 - 4\varepsilon + \frac{3p_0}{p_0 - 4B} \varepsilon \right) \left(1 + \text{rel. Kor.} \left(\frac{m}{r} \right) \right)$$

$$\ddot{\varepsilon} + m_0/r_0^3 \left(\frac{16B - p_0}{p_0 - 4B} \right) \varepsilon = 0$$

→ stabil falls $p_0 < 16 B$

Da ich bei der Herleitung mehrmals von der Vernachlässigung relativistischer Effekte Gebrauch gemacht habe, um diese Abschätzung zu machen, kann ich nicht erwarten den genauen Zahlenwert zu erhalten. Trotzdem ist die Abweichung von dem numerischen Ergebnis recht gering und gibt somit die Stabilitätsgrenze gut wieder.

Bis jetzt habe ich von den thermodynamischen Eigenschaften des Quark-Gluon-Plasmas keinen Gebrauch gemacht; alle bisher erhaltenen Resultate sind davon unabhängig. Zur Berechnung der Gesamtteilchenzahl und der Gesamtentropie müssen die thermodynamischen Beziehungen mittels der Variablen Druck angegeben werden.

Das Verhältnis T/μ_q ist konstant; diese Konstante werde ich im folgenden mit L bezeichnen:

$$L = T / \mu_q \quad (30)$$

Damit kann ich nun die Gleichungen (22) zunächst als Funktion von μ_q umschreiben :

$$p_q = (c_1 + c_2 L^2 + c_3 L^4) \mu_q^4 - B \quad (31a)$$

$$s_q = (2c_2 L + 4c_3 L^3) \mu_q^3 \quad (31b)$$

$$n_q = (4c_1 + 2c_2 L^2) \mu_q^3 \quad (31c)$$

$$\rho_q = 3p_q + 4B \quad (31d)$$

und dann Gleichung (31a) nach μ_q auflösen, da p_q als Lösung der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung bereits bekannt ist.

$$\mu_q(r) = \left\{ \frac{p_q(r) + B}{c_1 + c_2 L^2 + c_3 L^4} \right\}^{1/4} \quad (32a)$$

$$T = L \mu_q(r) \quad (32b)$$

Damit sind der Verlauf des chemischen Potentials $\mu_q(r)$ und der Temperatur $T(r)$ über den Stern bekannt.

An der Oberfläche R des Sterns nehmen chemisches

Potential und Temperatur endliche Werte an :

$$\mu_q(R) = \left\{ \frac{B}{c_1 + c_2 L^2 + c_3 L^4} \right\}^{1/4} \quad (33a)$$

$$T_q(R) = L \mu_q(R) \quad (33b)$$

Die Konstante L kann im Prinzip jeden beliebigen Wert annehmen. Die beiden interessanten Grenzfälle

$L = 0$ kalte Materie, Gesamtentropie Null

$L \rightarrow \infty$ ultraheiße Materie, Gesamtbaryonenzahl Null

führen zu den folgenden Höchstwerten für T und μ_q an der Oberfläche:

$$\begin{aligned} L = 0 : \quad \mu_q(R) &= (B/c_1)^{0.25} = 345 \text{ MeV} & (\alpha_S=0,6) \\ T(R) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L \rightarrow \infty : \quad \mu_q(R) &\rightarrow 0 \\ T(R) &\rightarrow (B/c_3)^{0.25} = 126 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Die Temperatur und das chemische Potential an der Oberfläche eines Quark-Gluon-Plasma-Sterns sind daher auf endliche Werte begrenzt :

$$\mu_q(R) \leq (B/c_1)^{**1/4}$$

$$T(R) \leq (B/c_3)^{**1/4}$$

Kein Bag im Gleichgewicht kann eine höhere Temperatur an der Oberfläche besitzen, unabhängig wie groß das Verhältnis Entropie zu Baryonenzahl auch ist. Ebenso kann das chemische Potential diesen Grenzwert nicht übersteigen.

Durch Einsetzen des chemischen Potentials aus Gleichung (32a) in die Gleichungen (31b) und (31c) erhalte ich die gesuchte Entropiedichte s_q und die Teilchenzahldichte n_q :

$$s_q(r) = \frac{2c_2L + 4c_3L^3}{(c_1 + c_2L^2 + c_3L^4)} \{ p_q(r) + B \} \quad (34)$$

$$n_q(r) = \frac{4c_1 + 2c_2L^2}{(c_1 + c_2L^2 + c_3L^4)} \{ p_q(r) + B \} \quad (35)$$

Das Verhältnis beider Größen ist die spezifische Entropie s_n , d.h. die Entropie pro Teilchen.

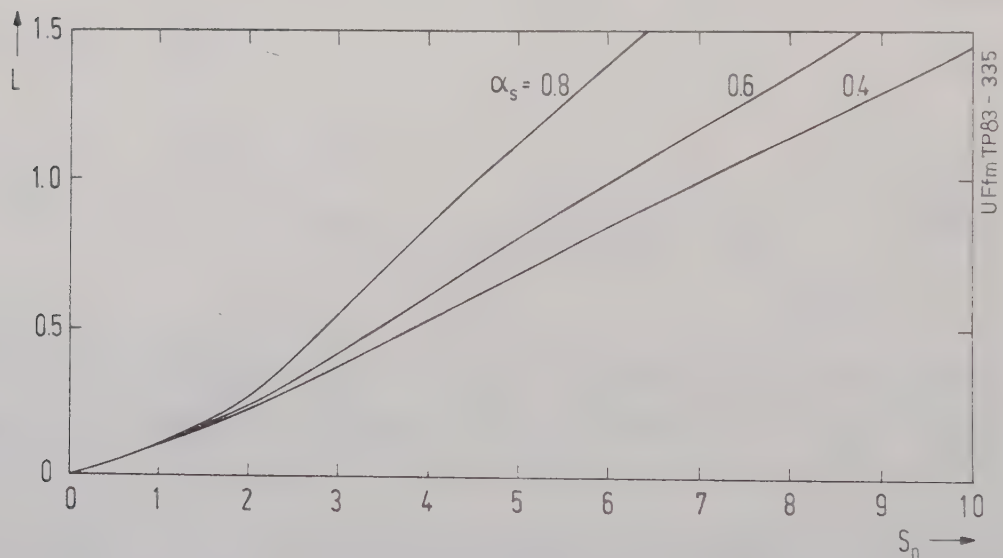
$$s_{nq} \equiv \frac{s_q}{n_q} = \frac{2c_2 + 4c_3L^2}{4c_1 + 2c_2L^2} L \quad (36)$$

Da L eine Konstante ist, ist die spezifische Entropie innerhalb des Quark-Gluon-Plasmas ebenfalls konstant.

$$s_n = \text{konstant}$$

Statt L kann also auch s_n als Parameter dienen. Die Abhängigkeit der Konstanten L von der der Intuition besser zugänglichen spezifischen Entropie ist in Figur 4 gezeigt für die Kopplungskonstante $\alpha_s = 0,5$. Die Beziehung zwischen s_n und L läßt sich mittels der Cardanschen Formeln ebenfalls umschreiben:

$$L = \left\{ \frac{1}{27} \left(\frac{c_2 s_n}{2c_3} \right)^3 + \frac{c_4 s_n}{2c_2} - \frac{c_2^2 s_n}{24c_3^2} + \left[\left(\frac{c_2}{6c_3} \right)^2 + s_n^2 \left(\frac{c_4^2}{4c_3^4} - \frac{c_4 c_2^2}{24c_3^3} - \frac{c_2^4}{12^3 c_3^4} \right) + s_n^4 \left(c_4 + \frac{c_2^2}{12c_3} \right) \frac{c_2^3}{3^3 2^4 c_3^4} \right]^{1/2} \right\}^{1/3} - \left\{ -\frac{1}{27} \left(\frac{c_2 s_n}{2c_3} \right)^3 + \frac{c_2^2 s_n}{24c_3^2} - \frac{c_4 s_n}{2c_2} + \left[\begin{array}{c} \text{''} \end{array} \right]^{1/2} \right\}^{1/3} - \frac{c_2}{6c_3} s_n \quad (37)$$



Figur 4

Die spezifische Entropie bezüglich der Baryonen, d.h. die Entropiedichte dividiert durch die Baryondichte, ist ebenfalls konstant und zwar gleich dem Dreifachen

der Entropie pro Quark, da jedes Baryon drei Quarks enthält und somit die dreifache Entropie trägt.

$$s_{nb} = 3 s_{nq} \quad (38)$$

Im Gegensatz zur allgemeinen Struktur der Quark-Gluon-Plasma-Sterne, d.h. ihrer Massen M_∞ , ihrer Radien R sowie Druck- und Dichteverlauf $\rho(r)$ und $p(r)$, hängen die Gesamtentropie, die Baryonenzahl sowie Temperaturverlauf und der Verlauf des chemischen Potentials von der spezifischen Entropie ab. Indem ich die Entropiedichte (34) und die Quarkdichte (35) in die Volumenintegrale (9 und 10) einsetze, lassen sich die beiden Volumenintegrale wieder unabhängig von der spezifischen Entropie ausführen, sobald die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung gelöst ist und der Druckverlauf $p(r)$ sowie der Rand R berechnet sind.

$$S_0 = 4\pi \frac{2c_2L + 4c_3L^3}{(c_1 + c_2L^2 + c_3L^4)^{0.75}} \int_0^R \frac{3/4}{(p(r)+B)} r^2 e^{\lambda(r)/2} dr \quad (39)$$

$$N_B = \frac{1}{3} N_q = \frac{4\pi (4c_1 + 2c_2L^2)}{3(c_1 + c_2L^2 + c_3L^4)^{0.75}} \int_0^R \frac{3/4}{(p(r)+B)} r^2 e^{\lambda(r)/2} dr \quad (40)$$

Während der jeweilige Vorfaktor vor den Integralen nur von L und damit nur von der spezifischen Entropie abhängt, sind die Integrale nur von der stellaren Struktur

abhängig und für jeden Quark-Gluon-Stern mit derselben Anfangsdichte $\rho(0)$ gleich.

$$I \equiv \int_0^R (p(r) + B) r e^{3/4 \int_0^r \lambda(r)/2 dr} dr \quad (41)$$

Das Integral I hat für jeden Quark-Gluon-Stern einen festen Wert. Damit werden die von der stellaren Struktur abhängigen Größen aus den Gleichungen für S und N entfernt.

$$S_0 = 4\pi \frac{2c_2 + 4c_3 L^2}{(c_1 + c_2 L^2 + c_3 L^4)^{0.75}} L I \quad (42)$$

$$N_B = \frac{4\pi}{3} \frac{4c_1 + 2c_2 L^2}{(c_1 + c_2 L^2 + c_3 L^4)^{0.75}} I \quad (43)$$

Gesamtentropie S_0 und Gesamtbaryonenzahl N_B sind somit den L -abhängigen Vorfaktoren proportional und haben insbesondere endliche Grenzwerte für alle L :

$$\begin{aligned} L = 0 : \quad S(L=0) &= 0 \\ N_B(L=0) &\equiv N_{B_0} = 16\pi/3 c_1^{0.25} I \quad (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L \rightarrow \infty : \quad S(L \rightarrow \infty) &\equiv S_\infty = 16\pi c_3^{0.25} I \quad (45) \\ N(L \rightarrow \infty) &= 0 \end{aligned}$$

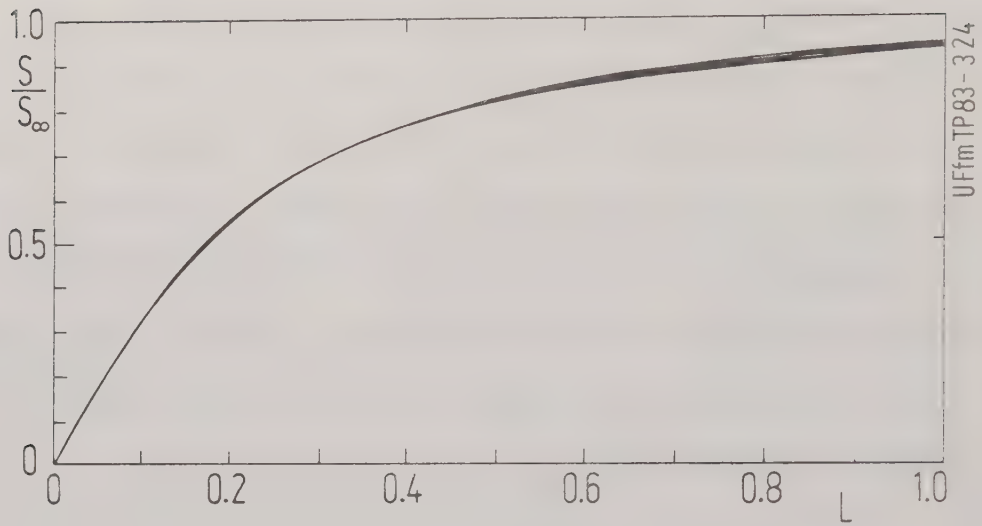
Wie bereits aus dem Verhalten der Dichten $s(r)$ und $n(r)$ und auch anschaulich zu erkennen, verschwindet die Gesamtentropie bei kalten Sternen und die Baryonenzahl nimmt ihren oberen Grenzwert N_{B_0} an, während bei heißen Sternen die Baryonenzahl verschwindet (d.h. die Quarks und Antiquarks liegen dann in Paaren vor) und die Gesamtentropie einen endlichen Grenzwert annimmt, obwohl die spezifische Entropie gegen unendlich geht.

Das Verhältnis der globalen Größen Gesamtentropie S_0 zur Gesamtbaryonenzahl N_{B_0} ist gleich der lokalen Größe Entropie pro Baryon, d.h der spezifischen baryonischen Entropie s_{N_b} .

$$\frac{S}{N_B} = \frac{\frac{4\pi}{3} \frac{(2c_2 + 4c_3 L^2) L}{(c_1 + c_2 L^2 + c_3 L^4)^{3/4}}}{\frac{4\pi}{3} \frac{4c_1 + 2c_2 L^2}{(c_1 + c_2 L^2 + c_3 L^4)^{3/4}}} \cdot \frac{I}{I} = 3 \frac{2c_2 + 4c_3 L^2}{4c_1 + 2c_2 L^2} L = s_{N_b}$$

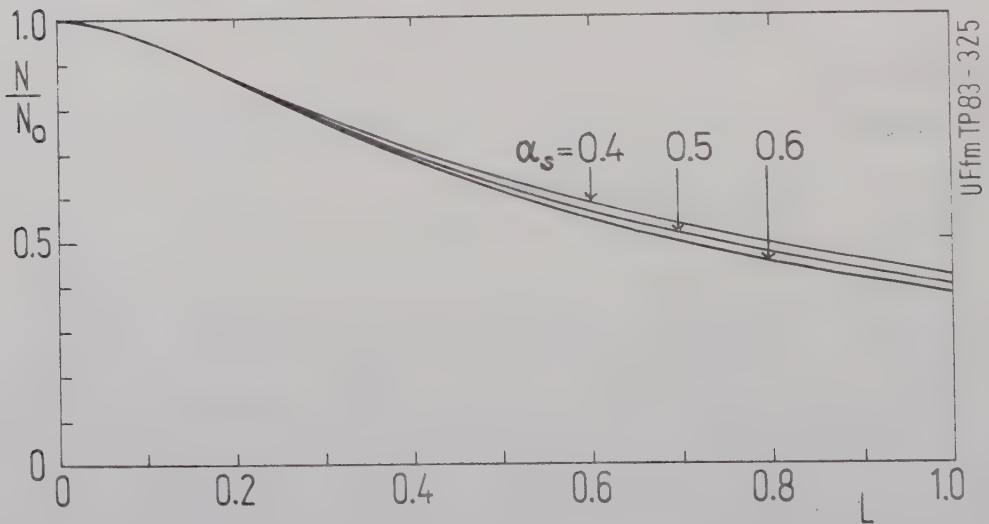
Um ein Gefühl für das Verhalten von Entropie und Baryonenzahl zu gewinnen, habe ich in den Figuren 5 und 6 das Verhältnis dieser Größen bezüglich ihres endlichen Grenzwerts aufgetragen. In Figur 5 ist S_0/S_∞ und in Figur 6 N_B/N_{B_0} dargestellt.

$$\frac{S_0}{S_\infty} = \frac{2c_2 L + 4c_3 L^3}{4c_3^{1/4} (c_1 + c_2 L^2 + c_3 L^4)^{3/4}} \quad (46)$$



Figur 5

$$\frac{N_B}{N_{B0}} = \frac{4c_1 + 2c_2 L^2}{4c_1^{1/4} (c_1 + c_2 L^2 + c_3 L^4)^{3/4}} \quad (47)$$



Figur 6

Für die im Ursprung singuläre Lösung $p(r)$ kann ich Gleichung (41) ebenfalls integrieren und erhalte

$$I = 4,859 \cdot 10^{56}$$

Damit ergibt sich für N_{B0} :

$$N_{B0} = 3,51 \cdot 10^{57}$$

und für S_∞ :

$$S_\infty = 2,9532 \cdot 10^{58}$$

Die Gesamtbaryonenzahl N_B , welche mit der Erhaltung der Quantenzahl Baryonenladung verknüpft ist, zählt die Gesamtzahl der im Quark-Gluon-Plasma-Stern vorhandenen Baryonenladungen. Die gesamte Baryonenzahl bzw. die Quarkzahl $= 3 \cdot$ Baryonenzahl unterscheidet sich durch Paare von Baryonen und Antibaryonen bzw. durch Paare von Quarks und Antiquarks von der Baryonenladung bzw. der Quarkladung. Diese Paare, welche bei endlichen Temperaturen und somit endlicher spezifischer Entropie als Anregungen vorhanden sind, tragen jedoch per Definition (Gleichung 20) nicht zur Gesamtbaryonenladung bei.

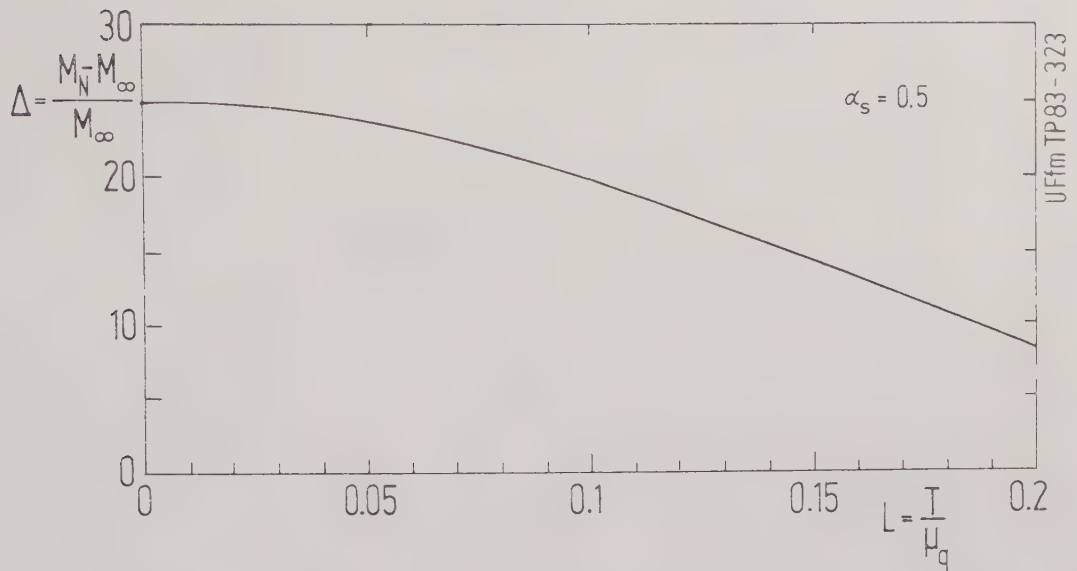
Die Gesamtbaryonenzahl multipliziert mit der mittleren Masse eines die ursprüngliche stellare Materie bildenden Baryons (≈ 939 MeV) ist gleich der sogenannten nackten Masse, d.h. jener Masse, welche der Quark-Stern besäße, würde seine Materie ins Unendliche verteilt werden.

$$\text{Nackte Masse} : M_n = N_B m_B \quad (48)$$

Die Differenz zwischen der nackten Masse M_n und der asymptotischen Masse M_∞ ist die Bindungsenergie des Sterns. Je größer der Massendefekt, desto stärker ist die stellare Materie gebunden.

$$\text{Massendefekt } \Delta = \frac{M_n - M_\infty}{M_\infty} \quad (49)$$

Dieser Massendefekt erreicht bei einem gegebenen Quark-Gluon-Plasma-Stern mit fester Masse M_∞ sein Maximum in Abhängigkeit von der spezifischen Entropie bei der größtmöglichen nackten Masse M_n . Diese wird für kalte Sterne, d.h. für $s_n = 0$, erreicht, wie bereits in Figur 6 zu sehen war. Ein Quark-Gluon-Stern mit von Null verschiedener Entropie und Temperatur besitzt eine geringere Baryonenzahl als der entsprechende kalte Stern, d.h. eine geringere nackte Masse und damit eine geringere Bindung Δ bezüglich der Baryonen; mit wachsender spezifischer Entropie nimmt der Massendefekt ab. Für den speziellen Wert $\alpha_s = 0,5$ der starken Kopplungskonstanten ist für einen Modellstern mit $M = 1.8 M_0$ der Massendefekt Δ als Funktion der Konstanten T/μ_q und damit über Gleichung (36) auch der spezifischen Entropie in Figur 7 gezeigt.

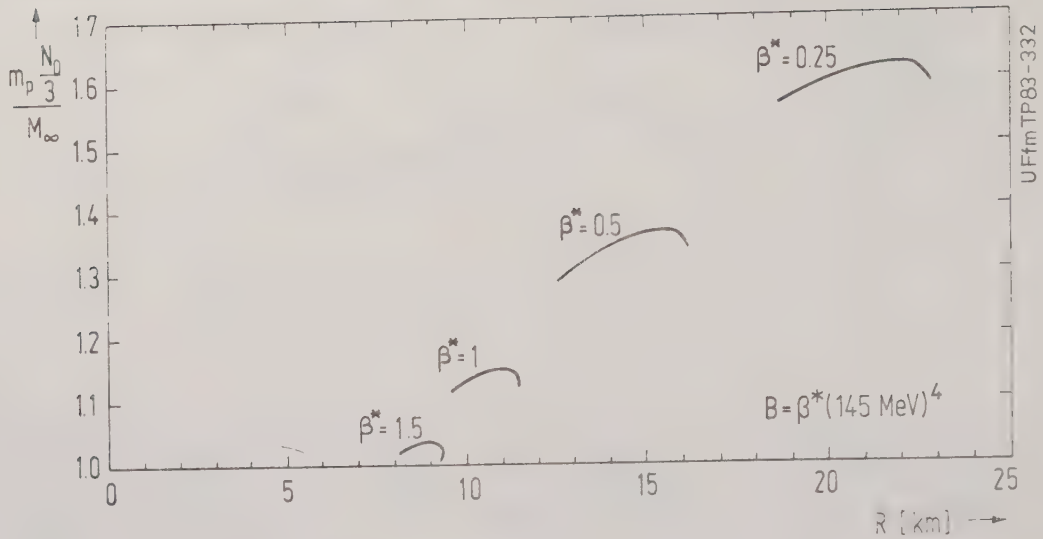


Figur 7

Für den speziellen Quark-Stern mit singulärer zentraler Dichte beträgt die Nackte Masse :

$$M_n = 4,342 \text{ km} = 2,895 M_0$$

In Figur 8 stelle ich anstelle der asymptotischen Masse M_∞ die nackte Masse M_n in einem Masse-Radius-Diagramm dar. Die Kurven zeigen einen ähnlichen Verlauf wie das vorangegangene Masse-Radius-Diagramm. An exakt der gleichen Stelle wie in der asymptotischen Masse-Radius-Kurve (Figur 2) besitzen die nackte Masse-Radius-Kurven ihr Maximum, d.h. der letzte stabile Stern besitzt auch die höchste Baryonenzahl und den größten Massendefekt.



Figur 8

Dieses Maximum der Bindung am Punkt maximaler Masse ist ebenfalls ein Indikator für den Wechsel von Stabilität zu Instabilität in der Masse-Radius-Kurve ¹². Nackte Massen als auch die Massendefekte wachsen ebenso wie die maximal möglichen asymptotischen Massen mit kleiner werdender Bag-Konstante B an. Manche Elementarteilchenphysiker bevorzugen jedoch höhere Werte für die Bag-Konstante als den ursprünglichen Wert $B = (145 \text{ MeV})^4$ ¹³. Diese höheren Bag-Konstanten führen zu kleineren stabilen Quark-Sternen. Eine untere Grenze wird bei einer maximalen Bag-Konstanten von $B = (188 \text{ MeV})^4$ erreicht. Sobald B diesen Wert übersteigt, wird der Massendefekt und damit die Bindungsenergie negativ. Ein solcher Stern würde sich nicht durch Gravitationskollaps bilden; eine

Expansion der stellaren Materie und Verteilung ins Unendliche ist energetisch günstiger. Umgekehrt wäre ein echter experimenteller Beweis für eine Bag-Konstante größer als $(188 \text{ MeV})^4$ ein Beweis für die Nichtexistenz von Quark-Gluon-Plasma-Sternen.

In der folgenden Tabelle habe ich noch einmal zum Vergleich alle berechneten Größen für den jeweils letzten stabilen Quark-Gluon-Plasma-Stern aufgeführt.

$B^{Q25} \text{ (MeV)}$	102,53	121,93	145	160,47
$\Delta \text{ (\%)}$	63,52	36,8	25,83	2,583
$R \text{ (km)}$	22	15,67	11,2	9
$M \text{ (M}_0\text{)}$	4,1	2,86	2,03	1,66
$M_N \text{ (M}_0\text{)}$	6,639	3,8714	2,5292	1,6926
z	0,4967	0,4773	0,47185	0,4907
$I \text{ (*10}^{56}\text{)}$	11,14	6,498	4,245	2,84
$N_0 \text{ (*10}^{57}\text{)}$	8,05	4,694	3,0665	2,0521
$S_0 \text{ (*10}^{58}\text{)}$	6,77	3,949	2,58	1,725

4. Weitere Quantenzahlen: Leptonen, Ladung

Die bisher betrachteten Sterne sind aufgebaut aus einem Quark-Gluon-Plasma bestehend aus leichten Quarks (Entartungsfaktor $12 = 3 \text{ (Color)} * 2 \text{ (Flavour)} * 2 \text{ (Spin)}$) und den die Wechselwirkung vermittelnden und auch selbstwechselwirkenden Gluonen (Entartungsfaktor $16 = 8 \text{ (Color)} * 2 \text{ (Spin, transversal)}$). Bei endlichen Temperaturen sind in einem thermodynamischen System jedoch auch Photonen enthalten, welche selbst wiederum mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in Teilchen-Antiteilchen-Paaren materialisieren können. Je geringer die Ruhemasse der Teilchen desto leichter können die Paare erzeugt werden. In Betracht kommen deshalb in erster Linie Teilchen ohne (oder mit vernachlässigbarer) Ruhemasse wie Neutrinos und Antineutrinos sowie Teilchen mit geringer Ruhemasse wie Elektronen und Positronen. Neutrinos wechselwirken mit den Elektronen über die schwache Wechselwirkung; die Elektronen wechselwirken außerdem mit den Quarks elektromagnetisch, da jedes Quark eine drittelzahlige Ladung trägt, welche in den bisherigen Betrachtungen vernachlässigt wurde.

Jeder Quantenzahl ordne ich ein ihr entsprechendes chemisches Potential zu :

$q_b \rightarrow \mu_b$: baryonisches chemisches Potential

$q_l \rightarrow \mu_l$: leptonisches chemisches Potential

$q_e \rightarrow \mu_e$: elektrisches chemisches Potential

Der Parameter "chemisches Potential" ist in die großkanonische Behandlung thermodynamischer Systeme eingeführt worden, um die korrespondierende Quantenzahl im Mittel zu erhalten, welche bei einer kanonischen Behandlung des Systems dagegen explizit berücksichtigt wird. μ_B sorgt für die Erhaltung der Baryonenzahl, μ_L für die Erhaltung der Leptonenzahl und μ_e für die elektrische Ladungserhaltung.

Falls sich das Quark-Gluon-Plasma durch einen Phasenübergang der hadronischen Materie, welche einen Neutronenstern aufbaut, bildet, so sind sowohl die Gesamtladung Q als auch die Gesamtleptonenzahl L gleich Null. Beides ist am einfachsten durch eine verschwindende lokale Ladungsdichte n_e und eine verschwindende lokale Leptonendichte n_l zu erreichen. Dabei bleiben die in Kapitel 3 gemachten Annahmen bezüglich Isotropie und sphärisch symmetrischem Gravitationsfeld weiterhin gültig.

Das Variationsprinzip (7) läßt sich zwar um beliebig viele weitere Quantenzahlen erweitern ($\dots + l_3 A_0 + l_4 B_0 + \dots$), jedoch bringt mir ein derartiges Vorgehen keine prinzipiell neuen Erkenntnisse ($1/a = l_2/l_3$, $1/b = l_2/l_4$, $\dots$), so daß ich mich auf die Zustandsgleichung des erweiterten Quark-Gluon-Plasmas konzentrieren kann.

Falls Q_0 nicht verschwinden würde, müßte explizit der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes zum Energie-Impuls-Tensor der Materie in den Einstein-Gleichungen (1) addiert werden.

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{em} + T_{\mu\nu}^{mat.}$$

Eine, wenn überhaupt vorhandene, Gesamtladung des Sterns ist sicher extrem klein, da andernfalls eine Entladung durch Emission geladener Teilchen oder durch Einfangen geladener Teilchen aus der kosmischen Strahlung stattfinden würde; die durch einen modifizierten Energie-Impuls-Tensor verursachte Komplizierung scheint mir daher nicht gerechtfertigt. Eine noch verbleibende Restladung trägt zudem zur stellaren Struktur vernachlässigbar wenig bei, so daß mir als Arbeitshypothese verschwindende Gesamtladung $Q_0 \equiv 0$ vernünftig scheint.

Die Zustandsgleichung des erweiterten Quark-Gluon-Plasmas berechne ich, indem ich für Teilchen und Antiteilchen gemeinsam ^{14,15} die großkanonische Verteilungsfunktion berechne und dabei das chemische Potential additiv aus den einzelnen chemischen Potentialen zusammensetze, welche mit den von diesem Teilchen getragenen Ladungen korrespondieren.

$$\mu_p = \sum_{i=b,l,e} q(p)_i \mu_i$$

In der folgenden Tabelle sind die einzelnen Ladungen der im erweiterten Quark-Gluon-Plasma enthaltenen Teilchen aufgeführt :

p	$\begin{smallmatrix} p \\ q \\ b \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} p \\ q \\ l \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} p \\ q \\ e \end{smallmatrix}$	g
u	1/3	0	2/3	6
u	-1/3	0	-2/3	6
d	1/3	0	-1/3	6
d	-1/3	0	1/3	6
e ⁻	0	1	-1	2
e ⁺	0	-1	1	2
g	0	0	0	16
γ	0	0	0	2
ν	0	1	0	2
ν	0	-1	0	2

Die großkanonischen Potentiale lauten explizit :

$$\Omega_{u,\bar{u}} = - \frac{V}{6\pi^2} 6 \left[\frac{1}{4} \left(1 - 2 \frac{d_3}{\pi}\right) \left(\frac{2}{3} \mu_e + \frac{1}{3} \mu_b\right)^4 + \frac{\pi^2}{2} \left(1 - 2 \frac{d_3}{\pi}\right) \left(\frac{2}{3} \mu_e + \frac{1}{3} \mu_b\right)^2 T^2 + \frac{7}{60} \pi^4 \left(1 - \frac{50}{24} \frac{d_3}{\pi}\right) T^4 \right] \quad (50a)$$

$$\Omega_{d,\bar{d}} = - \frac{V}{6\pi^2} 6 \left[\frac{1}{4} \left(1 - 2 \frac{d_3}{\pi}\right) \left(\frac{1}{3} \mu_b - \frac{1}{3} \mu_e\right)^4 + \frac{\pi^2}{2} \left(1 - 2 \frac{d_3}{\pi}\right) \left(\frac{1}{3} \mu_b - \frac{1}{3} \mu_e\right)^2 T^2 + \frac{7}{60} \pi^4 \left(1 - \frac{50}{24} \frac{d_3}{\pi}\right) T^4 \right] \quad (50b)$$

$$\Omega_\gamma = - V \frac{8\pi^2}{45} \left(1 - \frac{15}{4} \frac{d_3}{\pi}\right) T^4 \quad (50c)$$

$$\Omega_\delta = - V \frac{\pi^2}{45} T^4 \quad (50d)$$

$$\Omega_B = + V B \quad (50e)$$

$$\Omega_{e^+e^-} = - \frac{V}{6\pi^2} 2 \left[\frac{1}{4} (\mu_L - \mu_e)^4 + \frac{\pi^2}{2} (\mu_L - \mu_e)^2 T^2 + \frac{7}{60} \pi^4 T^4 \right] \quad (50f)$$

$$\Omega_{\nu_e \bar{\nu}_e} = - \frac{V}{6\pi^2} 2 \left[\frac{1}{4} \mu_L^4 + \frac{\pi^2}{2} \mu_L^2 T^2 + \frac{7}{60} \pi^4 T^4 \right] \quad (50g)$$

Das gesamte großkanonische Potential Ω_{tot} ist dann durch die Summe der einzelnen Potentiale gegeben :

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{tot}} &= \Omega_{u,\bar{u}} + \Omega_{d,\bar{d}} + \Omega_s + \Omega_{\bar{s}} + \Omega_B + \Omega_{e^+e^-} + \Omega_{\nu_e \bar{\nu}_e} \\ &= \Omega_{\text{tot}} (\mu_b, \mu_e, \mu_L, T, V) \\ &= - V p (\mu_b, \mu_e, \mu_L, T) \end{aligned} \quad (51)$$

Durch Hinzunehmen weiterer Quantenzahlen und der sie tragenden Teilchen, wobei als nächstes die massiven Quarks s (Strangeness-Ladung) und c (Charm-Ladung) sowie das massive Lepton μ (muonische Leptonladung) mit seinem dazugehörigen Neutrino ν_μ zu nennen wären und später auch die sehr schweren b - und t - Quarks und das τ - Lepton sowie das ν_τ - Neutrino zu berücksichtigen wären, kann ich das großkanonische Potential stark erweitern und somit die mikroskopische Zusammensetzung des heißen Quark-Gluon-Plasmas noch detaillierter beschreiben. Da aber die genannten Teilchen Ruhemassen besitzen, welche die Paarproduktion bei den im Quark-Gluon-Stern herrschenden Temperaturen unterdrücken, wäre ein solches Vorgehen nur sinnvoll, wenn sich durch das bereits beträchtlich erweiterte Quark-Gluon-Plasma (Gleichung 51) die stellare Struktur wesentlich verändern würde. Im Folgenden werde ich zeigen, daß dies

nicht der Fall ist und deshalb eine Berücksichtigung weiterer Quantenzahlen und Elementarteilchen vom Standpunkt der Theorie der stellaren Struktur nicht notwendig ist. Für lokale Prozesse und zur Erklärung von Beobachtungen muß dies nicht notwendig gelten; dort reicht jedoch die lokale Betrachtungsweise aus und globale Einflüsse wie Gravitation können ohne Rückwirkung lokal berücksichtigt werden oder je nach Prozeß sogar völlig vernachlässigt werden.

Durch partielle Ableitung des totalen großkanonischen Potentials Ω_{tot} nach seinen Variablen ergeben sich die mich interessierenden Dichten. Analog zum Vorgehen in Kapitel 3 stellen die Teilchenzahldichten n_i wieder echte Quantenladungsdichten dar, d.h. die Differenz zwischen den Dichten der die Quantenzahl tragenden Teilchen und den Dichten der die entgegengesetzte Quantenzahl tragenden Antiteilchen. Eine Ladungsdichte von Null bedeutet nicht, daß die Zahl der Ladungen im Systemvolumen Null ist, sondern daß gleich viele positive wie negative Ladungen vorhanden sind.

$$\text{Baryonenzahldichte} \quad : \quad n_b = - \frac{1}{V} \frac{\partial \Omega_{\text{tot}}}{\partial \mu_b} \quad (52a)$$

$$\text{elektrische Ladungsdichte} \quad : \quad n_e = - \frac{1}{V} \frac{\partial \Omega_{\text{tot}}}{\partial \mu_e} \quad (52b)$$

$$\text{leptonische Ladungsdichte} \quad : \quad n_l = - \frac{1}{V} \frac{\partial \Omega_{\text{tot}}}{\partial \mu_l} \quad (52c)$$

$$\text{Entropiedichte} : s = - \frac{1}{V} \frac{\partial \Omega_{tot}}{\partial T} \quad (52d)$$

$$\text{Druck} : p = - \frac{\partial \Omega_{tot}}{\partial V} = - \frac{\Omega_{tot}}{V} \quad (52e)$$

$$\text{Energiedichte} : \rho = \mu_b n_b + \mu_e n_e + \mu_l n_l + Ts - p \quad (52f)$$

Das Verschwinden der leptonischen Ladungsdichte führt auf folgende Gleichung :

$$\begin{aligned} n_l = 0 &= \frac{1}{3T^2} \left\{ [\mu_l^3 + T^2 \mu_l T^2] + [(\mu_l - \mu_e)^3 + T^2 (\mu_l - \mu_e) T^2] \right\} \\ &= \frac{1}{3T^2} \{ \mu_l^3 + \mu_e^3 - \mu_l \mu_e \} (2\mu_l - \mu_e) \quad (53) \end{aligned}$$

Da der Term innerhalb der geschweiften Klammer immer positiv und daher ungleich Null ist, muß $(2\mu_l - \mu_e)$ identisch verschwinden. Daraus folgt :

$$\mu_l = 1/2 \mu_e \quad (54)$$

$$\frac{\mu_l}{\mu_e} = \text{konstant} = \frac{1}{2}$$

Damit habe ich bereits eine Variable eliminiert bzw. durch eine der anderen Variablen ersetzt. Aus dem Verschwinden der elektrischen Ladungsdichte erhalte ich :

$$\begin{aligned}
 n_e = 0 = & \frac{1}{3\pi^2} \left[-(\mu_L - \mu_e)^3 - (\mu_L - \mu_e) \pi^2 T^2 \right] \\
 & + \frac{1}{\pi^2} \left[\left(1 - 2 \frac{ds}{\pi}\right) \left(\frac{1}{3} \mu_b + \frac{2}{3} \mu_e\right)^3 \cdot \frac{2}{3} + \pi^2 \left(1 - 2 \frac{ds}{\pi}\right) \left(\frac{1}{3} \mu_b + \frac{2}{3} \mu_e\right) \frac{2}{3} T^2 \right] \\
 & + \frac{1}{\pi^2} \left[\left(1 - 2 \frac{ds}{\pi}\right) \left(\frac{1}{3} \mu_b - \frac{1}{3} \mu_e\right)^3 \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \pi^2 \left(1 - 2 \frac{ds}{\pi}\right) \left(\frac{1}{3} \mu_b - \frac{1}{3} \mu_e\right) T^2 \right] \quad (55)
 \end{aligned}$$

Statt diese Gleichung nach μ_e aufzulösen, nutze ich die zwischen den chemischen Potentialen und der Temperatur bestehenden Beziehungen aus und definiere :

$$x \equiv \frac{\mu_e}{\mu_b} = \text{konstant}$$

$$\mu_e = x \mu_b$$

$$T = L \mu_b$$

Dieses so definierte L unterscheidet sich von dem im letzten Kapitel definierten L um einen Faktor 3, falls $\mu_e = 0$ ist, da jedes Quark nur eine drittelzahlige Baryonenladung trägt.

Nach Einsetzen der so definierten Konstanten kann ich Gleichung (55) nach L oder x auflösen :

$$\pi^2 L^2 = - \frac{\frac{1}{9} + \frac{5}{3}x + \frac{7}{3}x^2 + \left(\frac{\pi^2}{9} + \frac{3}{8(1-2\frac{ds}{\pi})}\right)x^3}{1 + \left(5 + \frac{3}{2(1-2\frac{ds}{\pi})}\right)x} \quad (56)$$

oder mit Hilfe der Cardanschen Formeln :

$$x = \left\{ \frac{a_1 a_2}{6} - \frac{a_3}{2} - \frac{a_1^3}{27} + \left[\frac{a_1^3}{27} + \frac{a_3^2}{4} + \frac{a_1^3 a_3}{27} - \frac{a_1^2 a_2^2}{108} - \frac{a_1 a_2 a_3}{6} \right]^{1/2} \right\}^{1/3} - \left\{ \frac{a_3}{2} + \frac{a_1^3}{27} - \frac{a_1 a_2}{6} + \left[\dots \right]^{1/2} \right\}^{1/3} - \frac{a_1}{3} \quad (57)$$

$$\text{mit: } a_1 = \frac{7}{\frac{17}{3} + \frac{5}{8} \left(1 - 2\frac{L}{\pi}\right)^{-1}} \quad a_2 = \frac{\frac{5}{3} + 8L^2 \left(5 + 3\left(1 - 2\frac{L}{\pi}\right)^{-1}\right)}{\frac{17}{3} + \frac{5}{8} \left(1 - 2\frac{L}{\pi}\right)^{-1}} \quad a_3 = \frac{\frac{4}{3} + 4L^2}{\frac{17}{3} + \frac{5}{8} \left(1 - 2\frac{L}{\pi}\right)^{-1}}$$

Nach Substitution von μ_1 und μ_e durch Ausnützen der Nebenbedingung verschwindender Ladungsdichte bleibt ein großkanonisches Potential, welches in seiner analytischen Struktur dem in Kapitel 3 diskutierten sehr ähnlich ist.

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{tot}} &= \Omega_{\text{tot}}(\mu_1, \mu_e, \mu_b, T, V) \\ &= -V p(\mu_1 = 1/2 \times(L) \mu_b, \\ &\quad \mu_e = x(L) \mu_b, \mu_b, T = L \mu_b) \\ &= -V p(L, \mu_b) \end{aligned}$$

Als einzige Variable bleibt das baryonische chemische Potential und als Parameter die Konstante L. Entsprechend dem Vorgehen in Kapitel 3 kann ich nun umgekehrt das chemische Potential μ_b als Funktion von p auffassen und in die thermodynamischen Beziehungen einsetzen.

$$\begin{aligned}
 p &= \left\{ \frac{1}{324 \pi^2} \left(1 - 2 \frac{d_s}{\pi} \right) (17x^4 + 28x^3 + 30x^2 + 4x + 2) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{18} \left(1 - 2 \frac{d_s}{\pi} \right) (5x^2 + 2x + 2) L^2 \\
 &\quad \left. + \frac{\pi^2}{9} \left(\frac{23}{5} - 11 \frac{d_s}{\pi} \right) L^4 \right\} \mu_b^4 - B \\
 &= c_4 \mu_b^4 - B
 \end{aligned}$$

$$\mu_b = \left(\frac{p + B}{c_4} \right)^{1/4}$$

$$s = \left\{ \left[\frac{1}{9} \left(1 - 2 \frac{d_s}{\pi} \right) (5x^2 + 2x + 2) + \frac{1}{6} x^2 \right] L + \frac{4\pi^2}{9} \left(\frac{23}{5} - 11 \frac{d_s}{\pi} \right) L^3 \right\} \mu_b^3 = c_5 \mu_b^3$$

$$n_b = \left(1 - 2 \frac{d_s}{\pi} \right) \left[\frac{1}{27\pi^2} (7x^3 + 15x^2 + 3x + 2) + \frac{1}{3} (x+2) L^2 \right] \mu_b^3 = c_6 \mu_b^3$$

$$\begin{aligned}
 p &= \mu_b n_b + Ts - p \\
 &= c_6 \mu_b^4 + c_5 \mu_b^4 - c_4 \mu_b^4 + B \\
 &= c_7 \mu_b^4 + B \\
 &= c_7 / c_4 (p + B) + B \\
 &= c_7 / c_4 p + (c_7 / c_4 + 1) B
 \end{aligned}$$

$$= \alpha p + (\alpha + 1) B \quad (58)$$

$$\alpha = c_7 / c_4 = \alpha(x, L) = \alpha(x(L), L) = \text{konstant}$$

Gleichung (58) stellt die Zustandsgleichung des erweiterten Quark-Gluon-Plasmas dar. Diese Beziehung kann ich nun in die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung einsetzen und alle stellaren Größen berechnen. Die thermodynamischen Beziehungen liefern mir außerdem nicht nur Entropiedichte und Baryonenladungsdichte; ich kann durch

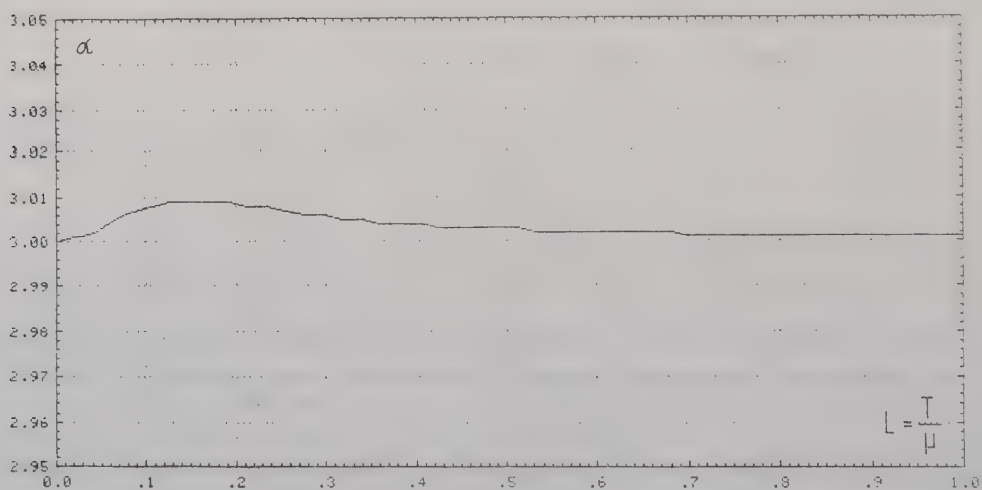
Trennen der einzelnen Gleichungen in ihre den jeweiligen Teilchen zugeordneten Terme ebenfalls die Elektronendichte und die Neutrinodichte explizit berechnen und die Beiträge der einzelnen Teilchensorten zu Druck, Entropie und Energiedichte separat angeben.

Die Zustandsgleichung des erweiterten Quark-Gluon-Plasmas (58) unterscheidet sich von der Zustandsgleichung des reinen Quark-Gluon-Plasmas durch den vom Parameter L abhängigen Koeffizienten α , welcher im Falle des reinen Quark-Gluon-Plasmas genau $\alpha \equiv 3$ beträgt (Gleichung 23).

$$\text{QGP} : \quad \rho = 3p + 4B$$

$$\text{EQGP} : \quad \rho = \alpha p + (\alpha+1)B$$

Somit spiegeln sich alle Effekte der zusätzlichen Quantenzahlen auf die Zustandsgleichung in dem Koeffizienten α wieder. In Figur 9 ist α als Funktion des Parameters L gezeigt.



Figur 9

Für große L geht α gegen 3, wie auch zu erwarten ist, da die temperaturabhängigen Terme überwiegen und das Plasma mit wachsendem L immer strahlungsartiger wird. Für L gegen Null muß sich ebenfalls $\alpha = 3$ ergeben, da nun aufgrund der fehlenden thermischen Anregung keine Paare mehr existieren. Die maximale Abweichung von 3 ergibt sich im Bereich $0,1 \leq L \leq 0,2$. Allerdings beträgt diese Abweichung weniger als 0,3%, d.h.

$$3 < \alpha < 3,09 \quad \forall L \in [0, \infty)$$

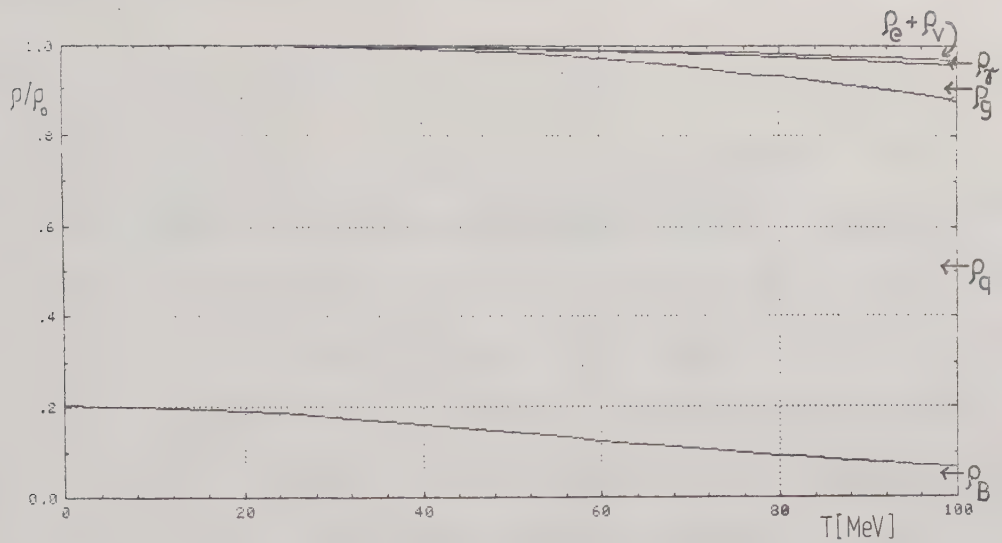
Diese äußerst geringe Veränderung in der Zustandsgleichung macht sich beim Lösen der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung nicht bemerkbar; ich erhalte praktisch dieselben Massen und Radien wie beim reinen Quark-Gluon-Stern. Die stellare Struktur bleibt also im wesentlichen durch Hinzunahme der weiteren Quantenzahlen unbeeinflusst. Dies rechtfertigt, die von den massiven Teilchen getragenen Quantenzahlen aus dem großkanonischen Potential auszuschließen, da bereits die jetzt erfolgte beträchtliche Erweiterung der mikroskopischen Beschreibung des Quark-Gluon-Plasmas keinen relevanten Effekt bezüglich des stellaren Aufbaus zeigt.

Die Schallgeschwindigkeit im erweiterten Quark-Gluon-Plasma ist nur geringfügig kleiner als die eines ultrarelativistischen Gases bzw. des ursprünglichen Quark-Gluon-Plasmas, welche exakt $c_s = 1/\sqrt{3}$ beträgt :

$$c_s = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)} = \sqrt{\partial p / \partial [\alpha p + (\alpha + 1) B]} \leq 1/\sqrt{3}$$

Beim Quark-Gluon-Plasma tragen die Gluonen zur Energiedichte bei ; die Quarks sowohl zur Energiedichte als auch zur Baryonenzahl. Mit wachsender Temperatur tragen bei gleicher Gesamtenergiedichte die Quarks relativ zu den Gluonen weniger bei, so daß sich die Baryondichte verringert, wie bereits in Kapitel 3 (Figur 6) diskutiert. Im erweiterten Quark-Gluon-Plasma sind beträchtlich mehr Teilchen vorhanden, welche anteilig zur Energiedichte beitragen. Dementsprechend kleiner kann dann allerdings auch der Beitrag der Quarks werden, welche als einzige baryonische Ladung tragen, so daß sich mit wachsender Temperatur der relative Anteil der baryonischen Ladungsträger stärker als im reinen Quark-Gluon-Plasma verringert und deshalb die erweiterten Quark-Sterne eine geringere Baryonenzahl und damit eine kleinere nackte Masse als die reinen Quark-Sterne bei gleicher asymptotischer Masse aufweisen.

In Figur 10 ist die relative Energiedichte im Quark-Gluon-Plasma in ihre einzelnen Bestandteile bei verschiedenen Temperaturen zerlegt. Dabei habe ich den Anteil der Elektronen, Positronen, Neutrinos und Antineutrinos aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit zusammengefaßt; der zu einem Temperaturwert gehörende Ordinatenabschnitt gibt den relativen Anteil des entsprechenden Bestandteils im Quark-Gluon-Plasma an der Gesamtenergiedichte an.



Figur 10

Das Absinken des Quark-Anteils und damit der baryonischen Ladung ist ebenso zu erkennen wie das Anwachsen der zusätzlichen Teilchen, welche zwar zu Druck und Energiedichte beitragen aber nicht zur Baryonendichte. Ein weiterer interessanter Punkt kann anhand Figur 10 diskutiert werden. Bisher habe ich die auch in relativistischen Schwerionenstößen übliche Voraussetzung gemacht, daß die im thermischen Gleichgewicht befindlichen Teilchen in einem gewissen Raumvolumen V (Reaktionszone) eingeschlossen bleiben ¹⁶. Dies entspricht einer großkanonischen Beschreibung des thermodynamischen Gleichgewichts, in welchem der Teilchenaustausch so erfolgt, daß das Gleichgewicht erhalten bleibt. Mikroskopisch betrachtet stellt sich nach einer zufälligen Abweichung vom Gleichgewicht dieses innerhalb einer ty-

pischen Stoßzeit wieder ein. Daher muß die typische freie Weglänge der im Gleichgewicht befindlichen Teilchen kleiner als die Abmessung des Gesamtsystems sein, d.h. kleiner als der Durchmesser des Quark-Gluon-Plasma-Sterns, welcher einige km beträgt. Diese Voraussetzung ist für alle Teilchen im erweiterten Quark-Gluon-Plasma erfüllt. Zusätzlich sind gerade die Neutrinos, welche aufgrund ihrer schwachen Wechselwirkung mit anderen Teilchen die größte freie Weglänge besitzen, nur in äußerst geringer Menge vorhanden, wie direkt aus Figur 10 ersichtlich ist. Diese Neutrinos können, da sie sich im thermodynamischen Gleichgewicht mit ihrer Umgebung befinden, praktisch keine Energie aus dem Gesamtsystem forttragen. Bei einem Wirkungsquerschnitt von $\sigma = 10^{-41}$ (E/MeV) cm^2 ¹⁷, typischen Dichten von einigen Kerndichten $n_b = 0,17 \text{ fm}^{-3}$ und Energien von einigen 10 MeV betragen die freien Weglängen der Neutrinos nur einige Zentimeter, d.h. sie können das System nicht verlassen.

5. Hadronenhüllen

Bisher war die Oberfläche der Quarksterne identisch mit der Bag-Oberfläche; der ganze Stern kann also als Riesenbag angesehen werden. Dies muß nicht unbedingt der Fall sein; es könnte im Prinzip möglich sein, daß sich eine nukleare Materiehülle um den Quark-Stern bildet oder nach der Bildung des Quark-Gluon-Plasmas verbleibt, so daß ich das gesamte Gebilde als einen Neutronenstern mit Quark-Gluon-Plasma-Kern beschreiben kann.

Der Übergang vom Quark-Gluon-Plasma zur hadronischen Materie stellt innerhalb des Sterns eine stabile Phasengrenze dar. Eine mikroskopische Beschreibung des Phasenübergangs von hadronischer Materie zu Quarkmaterie ist hier nicht notwendig, da ich für beide Bereiche eine Zustandsgleichung vorliegen habe und annehme, daß der Phasenübergang auch stattfindet, falls er überhaupt möglich ist. Damit der Radius R_{pg} , an welchem sich die beiden verschiedenen Zustände der Materie berühren, in thermodynamischem und mechanischem Sinn eine stabile Phasengrenze ist, müssen die folgenden vier Bedingungen erfüllt werden:

kein Netto-Teilchenfluß = gleiche baryonische chemische
Potentiale

$$\mu_b|_{\text{Kern}} = \mu_b|_{\text{Hülle}}$$

kein Entropiefluß = gleiche Temperaturen:

$$T|_{\text{Kern}} = T|_{\text{Hülle}}$$

keine mechanische Arbeit, keine Kräfte = gleiche Drücke:

$$P|_{\text{Kern}} = P|_{\text{Hülle}}$$

(Gibbsche Phasenbedingungen)

keine Rayleigh-Taylor-Instabilität = Energiedichte im

Kern größer gleich Energiedichte in der Hülle:

$$\rho|_{\text{Kern}} \geq \rho|_{\text{Hülle}}$$

Für die mögliche äußere stellare Hülle mache ich die folgenden vier Ansätze:

- a) Neutronen-Fermi-Gas
- b) Mischung aus Neutronen, Protonen, Pionen, Elektronen und Photonen
- c) Kernmaterie mit Wechselwirkung
- d) Bootstrap-Kernmaterie

a) Der Fermi-Druck der Neutronen wirkt dem Gravitationsdruck entgegen und ermöglicht so die Bildung von kalten Neutronensternen ¹⁸ . Die Neutronen bilden dabei ein freies Gas, d.h. sie wechselwirken nicht über die starke Wechselwirkung miteinander. Trotz dieser Vernachlässigung der Kernkräfte stehen jedoch die experimentellen Beobachtungen nicht im Widerspruch zu den theoretischen Voraussagen. Es scheint mir deshalb notwendig, ebenfalls diesen Ansatz zu untersuchen. Im Gegensatz zu den früher

betrachteten kalten Neutronensternen kann die Neutronenhülle des Quark-Gluon-Plasma-Sterns hohe Temperaturen besitzen, so daß nun eine Lösung der Fermi-Integrale notwendig werden kann. Bei Temperaturen bis zu einigen zehn MeV genügt jedoch eine Reihenentwicklung in T . Druck, Energiedichte und Neutronenzahl errechnen sich aus den folgenden Integralen:

$$p_N = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^4}{(p^2+m^2)^{1/2}} \frac{dp}{e^{\frac{(p^2+m^2)^{1/2}-\mu_b}{T}} + 1} \quad (60a)$$

$$p_N = 3 p_N + \frac{m^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2}{(p^2+m^2)^{1/2}} \frac{dp}{e^{\frac{(p^2+m^2)^{1/2}-\mu_b}{T}} + 1} \quad (60b)$$

$$n_N = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{\frac{(p^2+m^2)^{1/2}-\mu_b}{T}} + 1} \quad (60c)$$

$$s_N = \frac{S_N + p_N - \mu_b n_N}{T} \quad (60d)$$

Die Berechnung dieser Integrale ist numerisch sehr zeitaufwendig, so daß ich bevorzugt die Reihenentwicklung dieser Integrale ¹⁹ benutzt habe, falls die Voraussetzungen zu ihrer Anwendung vorlagen.

$$p_N = \frac{2\sqrt{2} m^{3/2}}{3\pi^2} \left[\frac{2}{5} (\mu-m)^{5/2} + \frac{1}{4} (\mu-m)^{3/2} T^2 - \frac{7}{360} (\mu-m)^{1/2} T^4 + \dots \right] \quad (61a)$$

$$n_N = \frac{2\sqrt{2} m^{3/2}}{3\pi^2} \left[(\mu-m)^{3/2} + \frac{1}{8} (\mu-m)^{-1/2} \pi^2 T^2 + \frac{7}{640} (\mu-m)^{-5/2} \pi^4 T^4 + \dots \right] \quad (61b)$$

$$s_N = \frac{2\sqrt{2} m^{3/2}}{3\pi^2} \left[\frac{1}{2} (\mu-m)^{1/2} \pi^2 T - \frac{7}{240} (\mu-m)^{-3/2} \pi^4 T^3 + \dots \right] \quad (61c)$$

$$p_N = \frac{2\sqrt{2} m^{3/2}}{3\pi^2} \left[\frac{1}{5} (3\mu+2m) (\mu-m)^{3/2} + \frac{1}{8} (3\mu-2m) (\mu-m)^{-1/2} \pi^2 T^2 + \frac{7}{640} (2m-\mu) (\mu-m)^{-5/2} \pi^4 T^4 + \dots \right] \quad (61d)$$

$$p_N = \left(\frac{5\sqrt{5} m^4}{3\pi^2} \right)^{2/5} p_N^{3/5} + \frac{3}{2} p_N - \frac{1}{4} m^3 \left(\frac{2\sqrt{2} m^{3/2}}{3\pi^2} \right) p_N^{-1/5} \pi^2 L^2 + \left(\frac{4\sqrt{2} m^{3/2}}{15\pi^2} \right)^{1/5} \quad (62)$$

$$p_N = \left(\frac{5\sqrt{5}}{3\pi^2} \right)^{2/5} m^4 \left(\frac{p_N}{m} \right)^{3/5} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{3\pi^2}{5\sqrt{5}} \right)^{2/5} \left(\frac{p_N}{m} \right)^{2/5} + O \cdot \left(\frac{p_N}{m} \right)^{-2/5} L^2 - \frac{2\sqrt{2}}{(15)^{2/5} \pi^{4/5}} \left(\frac{p_N}{m} \right)^{-4/5} L^2 + \dots \right] \quad (62')$$

Bevor ich mit dieser Zustandsgleichung des Neutronengases die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung löse, untersuche ich die Bedingungen an der Phasengrenze zum

Quark-Gluon-Plasma. Mit den Parametern $\alpha_s = 0,5$ und $m_N = 939$ MeV sowie der üblichen Bag-Konstanten scheint die Phasengrenze für kalte Materie ($T=0$) bei einem chemischen Potential $\mu_N = 17116$ MeV zu liegen, wobei der Druck $p = 8276$ B beträgt, also weit im instabilen Bereich der Quark-Gluon-Sterne liegt. Da hier jedoch die nichtrelativistische Näherung (61) versagt, müssen die Fermi-Integrale (60) exakt gelöst werden.

Für $T = 0$ ist dies analytisch möglich:

$$p_N = \frac{1}{12\pi^2} m^4 \left[\left(\frac{\mu}{m} \right) \left(\left(\frac{\mu}{m} \right)^2 - 1 \right)^{1/2} \left[\left(\frac{\mu}{m} \right)^2 - \frac{5}{2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{\mu}{m} + \sqrt{\left(\frac{\mu}{m} \right)^2 - 1} \right) \right] \quad (63a)$$

$$n_N = \frac{1}{3\pi^2} m^3 \left[\left(\frac{\mu}{m} \right)^2 - 1 \right]^{3/2} \quad (63b)$$

$$s_N = 0 \quad (63c)$$

$$p_N = \frac{1}{4\pi^2} m^4 \left[\left(\frac{\mu}{m} \right) \left(\left(\frac{\mu}{m} \right)^2 - 1 \right)^{1/2} \left[\left(\frac{\mu}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{\mu}{m} \right) + \sqrt{\left(\frac{\mu}{m} \right)^2 - 1} \right] \right] \quad (63d)$$

Da diese Lösung für alle μ_b gilt und für kleine μ_b mit der Reihenentwicklung (61) übereinstimmt, für welche sich der hohe Wert von $\mu_b = 17$ GeV ergab, kann ich nun die Phasengrenze mittels der analytischen Lösung für $\mu_b \gg m_N$ suchen und erhalte:

$$p_N \rightarrow \frac{1}{12\pi^2} \mu_b^4 > p_q = \frac{1}{2\pi^2} \left(1 - 2\frac{d_s}{\pi}\right) \left(\frac{\mu_b}{3}\right)^4 - \mathcal{B}$$

Damit ist bewiesen, daß es für ein kaltes Fermi-Gas keine Phasengrenze gibt, da das Quark-Gluon-Plasma stets den geringeren Druck aufweist.

Bei endlichen Temperaturen sinken das chemische Potential und der Druck ab und eine Phasengrenze bei realistischen Werten von p ist erreichbar. Der Phasengrenzpunkt mit der niedrigsten Temperatur liegt bei $T = 98,904$ MeV und $\mu_b = 3\mu_q = 960,6$ MeV, d.h. der dem Quark-Gluon-Kern zugeordnete Parameter L beträgt $L = 0,3089$. An der Phasengrenze beträgt der Druck $p = 105,87$ MeV fm⁻³ und die Energiedichte in der Quark-Gluon-Phase $g_q = 548,87$ MeV fm⁻³. Dies bedeutet, daß jetzt Rayleigh-Taylor-Instabilitäten auftreten und die Phasengrenze zerstören werden. Für alle anderen Punkte an der Phasengrenze, welche sich zu höheren μ_b -und T - Werten verschiebt, gilt dies ebenfalls. Es gibt somit keine Neutronen-Fermi-Gas-Hülle um den Quark-Gluon-Kern.

b) Durch Hinzunahme von Pionen ändert sich die obige Betrachtung nicht, da der Beitrag der Pionen zu Druck und Energiedichte vernachlässigbar klein ist gegenüber dem Beitrag der Neutronen. Vernachlässige ich die Quantennatur der Neutronen und fasse sie als Boltzmann-Teilchen auf, so ergibt sich als exakte Lösung der Integrale (60) im Boltzmann-Grenzfall:

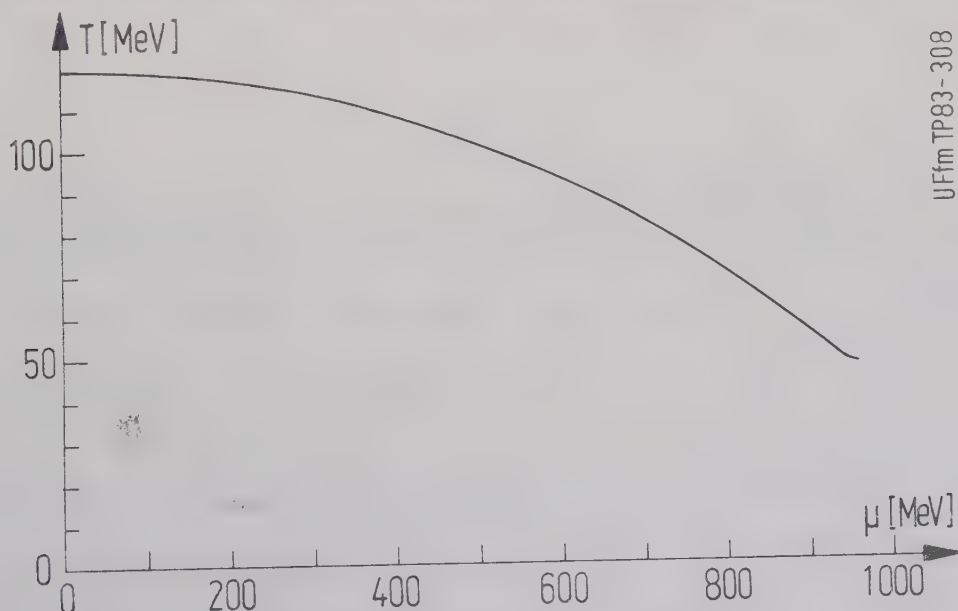
$$p = \frac{g}{2\pi^2} m^2 T^2 e^{\frac{\mu}{T}} k_2\left(\frac{m}{T}\right) \quad (64a)$$

$$n = \frac{g}{2\pi^2} m^2 T e^{\frac{\mu}{T}} k_1\left(\frac{m}{T}\right) \quad (64b)$$

$$p = \frac{g}{2\pi^2} m^2 T^2 e^{\frac{\mu}{T}} \left[3 k_2\left(\frac{m}{T}\right) + \frac{m}{T} k_1\left(\frac{m}{T}\right) \right] \quad (64c)$$

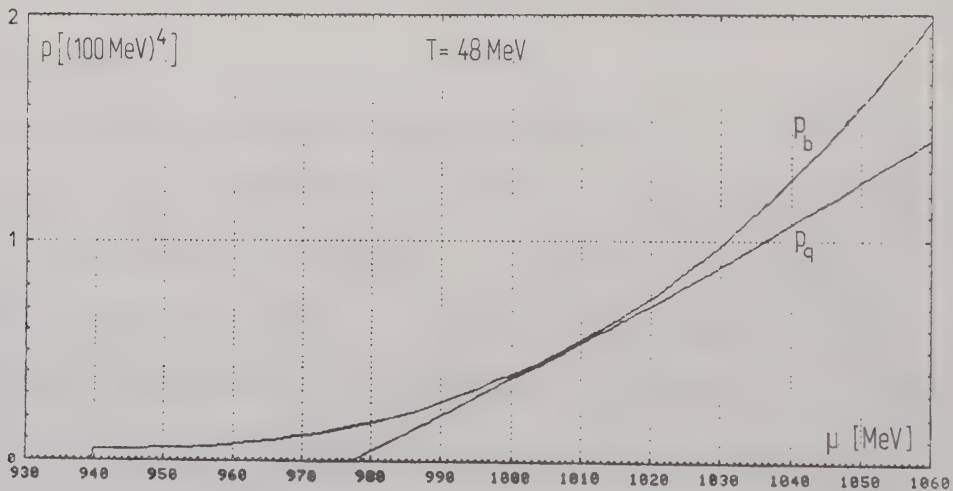
$$s = \frac{g + p - \mu n}{T} \quad (64d)$$

Die Phasengrenze zwischen dem Quark-Gluon-Plasma und dem Boltzmann-Gas ist in Figur 11 gezeigt.



Figur 11

Unterhalb einer Grenztemperatur $T = 48,9$ MeV und oberhalb eines chemischen Potentials $\mu = 960$ MeV ist kein Phasengleichgewicht vorhanden. Oberhalb dieser Grenztemperatur ist sicherlich auch die Boltzmann-Näherung gerechtfertigt. In Figur 11 ist das Rayleigh-Taylor-Dichtekriterium bereits berücksichtigt. Für eine Temperatur knapp unterhalb der Grenztemperatur, bei welcher eine Phasengrenze noch möglich ist, ist in Figur 12 der Verlauf des Drucks im Quark-Gluon-Plasma und im Boltzmann-Nukleonengas gemeinsam dargestellt. Der Druck in der Boltzmann-Phase liegt immer oberhalb des Drucks der Quark-Phase; beide Kurven schneiden sich nicht. Somit existiert auch keine stabile Phasengrenze.

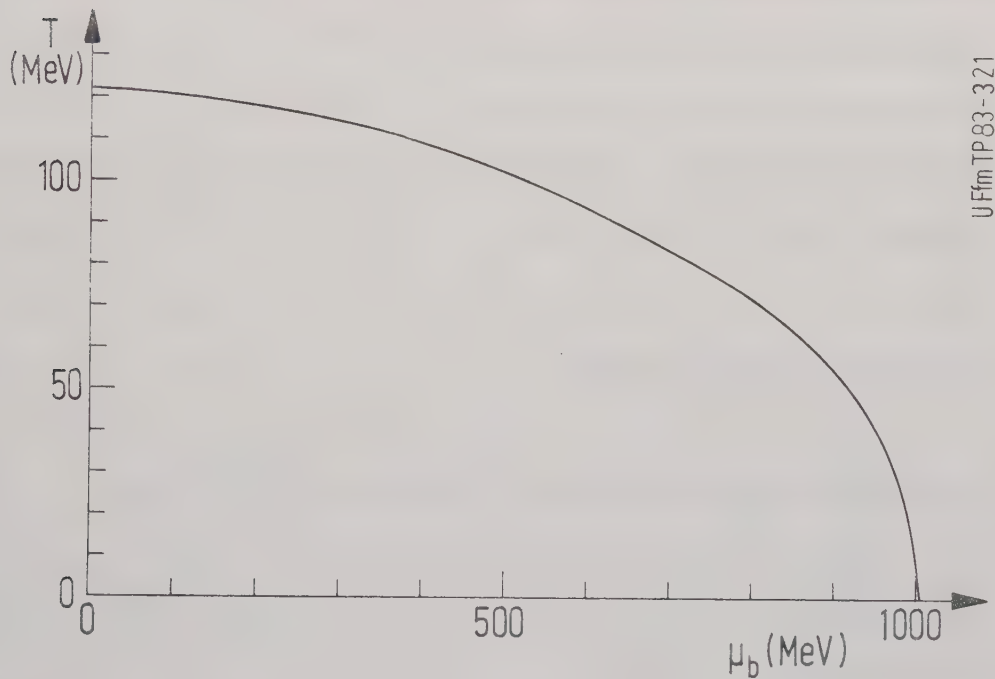


Figur 12

Ein reines Strahlungsgas

$$\rho = 3 p \quad (65)$$

aus z.B. Photonen, leichten Teilchen-Antiteilchen-Paaren oder Neutrinos besitzt ebenfalls eine Phasengrenze mit dem Quark-Gluon-Plasma. Für Photonen ist das entsprechende μ -T-Diagramm in Figur 13 dargestellt:



Figur 13

Eine Strahlungsgashölle ist daher für alle Quark-Sterne möglich. Diesen speziellen Fall werde ich in Kapitel 7 detailliert behandeln.

c) Die stark anziehende Wirkung der Kernkraft zwischen den Neutronen und Protonen, welche auch zur Bildung von Atomkernen führt, könnte die Bildung einer hadronischen

Hülle verursachen. Daher habe ich einen empirischen Ansatz für das großkanonische Potential von Kernmaterie mit Wechselwirkung gemacht, wobei ich alle im kalten Grundzustand der Kernmaterie bekannten Eigenschaften berücksichtigt habe. Dies sind:

Grundzustandsteilchendichte	$n_0 = 0,17 \text{ fm}^{-3}$
Masse	$m = 939 \text{ MeV}$
Grundzustandsbindungsenergie	$\varepsilon_0 = -16 \text{ MeV}$
Grundzustandsenergiedichte	$\rho_0 = 156,9 \text{ MeV}$
chemisches Potential	$\mu_0 = 923 \text{ MeV}$
Druck	$p_0 = 0$
Entropie	$s_0 = 0$
Kompressionskonstante	$K_0 = 210 \text{ MeV}$

Um eine Temperaturabhängigkeit zu erhalten, nehme ich an, daß die spezifische Entropie, d.h. die Entropie pro Nukleon dieselbe wie die eines idealen Fermi-Gases mit Entartung $g=4$ ist.

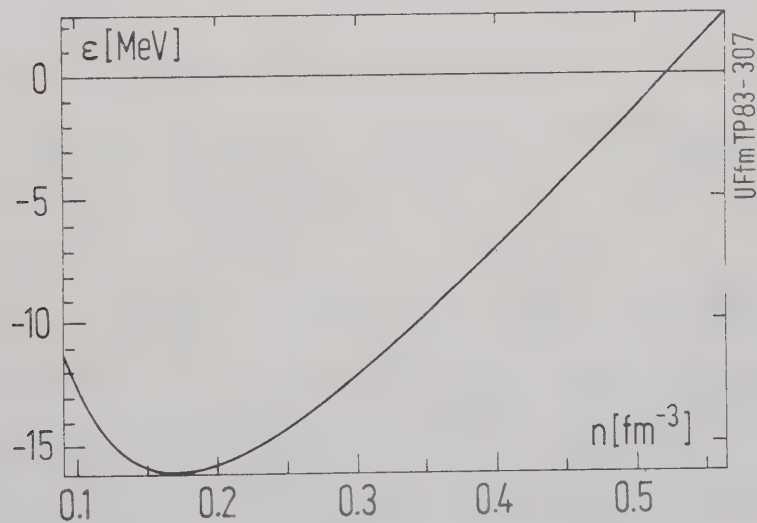
$$s_N = s/n|_{\text{Fermi}} = 1/2 \pi^2 T/\mu$$

Alle aufgestellten Froderungen werden von dem folgenden großkanonischen Potential

$$\begin{aligned} \Omega_I(\mu_b, T, V) = & - V 1,1687 \cdot 10^{-4} (\mu_b - 1798 \mu_b \\ & + 8,077 \cdot 10^5 \mu_b + 3,089 \mu_b T^2) \quad (66) \end{aligned}$$

erfüllt. Die Struktur des großkanonischen Potentials ist analog der eines Fermi-Gases (Gleichung 61), wobei zusätzlich die Wechselwirkung empirisch berücksichtigt wird. In der relativistischen Hydrodynamik wird meist mittels einer Legendre-Transformation vom chemischen Potential μ zur Teilchendichte n übergegangen und damit ein ähnlicher Ansatz gemacht 20,21,22,23,24,25.

Als Beispiel ist in Figur 14 die innere Energie als Funktion der Teilchenzahldichte bei kalter Kernmaterie dargestellt. Ein Vergleich mit einer in relativistischen Schwerionenkollisionen verwendeten nuklearen Zustandsgleichung ²⁶ ergab keine Abweichungen vom gezeigten Verlauf.



Figur 14

Durch Differenzieren des großkanonischen Potentials nach

V, T und μ erhalte ich die thermodynamischen Größen:

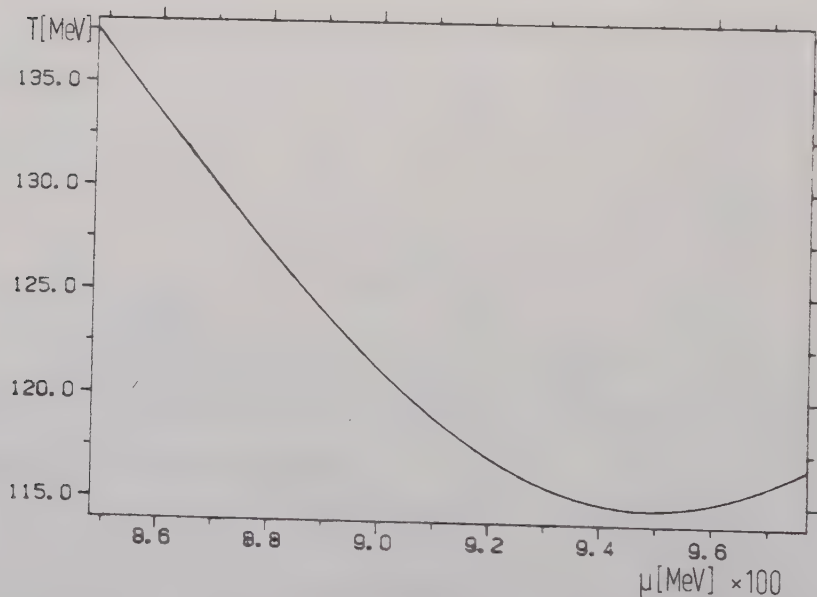
$$p = 1,1687 \cdot 10^{-4} \left(\mu^{5/2} - 1798 \mu^{3/2} + 8,077 \cdot 10^5 \mu^{1/2} + 3,089 \mu^{1/2} T^2 \right)$$

$$n = 1,1687 \cdot 10^{-4} \left(\frac{5}{2} \mu^{3/2} - \frac{3}{2} 1798 \mu^{1/2} + \frac{1}{2} 8,077 \cdot 10^5 \mu^{-1/2} + \frac{1}{2} 3,089 \mu^{-1/2} T^2 \right)$$

$$s = 1,1687 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 3,089 \mu^{1/2} T$$

$$p = 1,1687 \cdot 10^{-4} \left(\frac{3}{2} \mu^{5/2} - \frac{1}{2} 1798 \mu^{3/2} - \frac{1}{2} 8,077 \cdot 10^5 \mu^{1/2} + \frac{3}{2} 3,089 \mu^{1/2} T^2 \right)$$

Die Phasengrenze zwischen dem Quark-Gluon-Plasma und der durch das großkanonische Potential Ω_I beschriebenen wechselwirkenden Kernmaterie existiert nur in einem äußerst engen Temperaturintervall, wie Figur 15 zeigt.



Figur 15

Für höhere Werte des chemischen Potentials und der Temperatur wird die Energiedichte des Quark-Gluon-Plasmas geringer als diejenige der Kernmaterie und Rayleigh-Taylor-Instabilität tritt ein; für geringere Werte werden Druck oder Energiedichte negativ, d.h. der Bereich des μ -T-Diagramms, welcher eine sinnvolle Beschreibung von Kernmaterie ergibt, wird verlassen. Somit ist auch die Kernmaterie mit Wechselwirkung kein geeigneter Kandidat für eine hadronische Quarksternhülle. Zudem liegt das obige Temperaturintervall weit über der Temperatur, bei welcher die Kernmaterie ihre Bindungseigenschaften verliert; in diesem Modell bei Temperaturen oberhalb etwa 7 MeV. Damit ist die anziehende Wirkung verloren; auch ist der einfache Fermi-Gas-Ansatz für die Temperaturabhängigkeit vermutlich nicht mehr gerechtfertigt. Zu einer besseren Beschreibung sind jedoch experimentelle Daten im Bereich hoher Dichten und Temperaturen nötig, welche noch nicht vorliegen.

d) Ein Ansatz zur Beschreibung hadronischer Materie und des Phasenübergangs zum Quark-Gluon-Plasma, welcher alle hadronischen Elementarteilchen und ihre Resonanzen berücksichtigt, ist das Bootstrap-Modell ^{27,28}. Jedem Teilchen und jeder Resonanz wird in diesem Modell ein Eigenvolumen zugewiesen. Werden nun zwei Teilchen so dicht aneinander gepreßt, daß das von ihnen eingenommene Volumen gleich der Summe der Teilvolumina ist, so ist

ein neues Teilchen mit dem entsprechend größeren Summenvolumen entstanden. Dies setzt sich solange fort, wobei die Dichte der möglichen Zustände exponentiell anwächst ($\tau(m^2) \propto \exp(m/T_0)$, $T_0 = 160$ MeV, gefittet an das experimentelle Massenspektrum), bis das gesamte dem System zur Verfügung stehende Reaktionsvolumen eingenommen wird von einem einzigen Elementarteilchen. Eine weitere Erhöhung der Energiedichte durch äußeren Zwang führt zum Übergang zum Quark-Bag. Um die Zustandsgleichung der Bootstrap-Kernmaterie zu berechnen, muß folgende implizite Gleichung, welche die Teilchenzustandsfunktion G mit der Zustandsfunktion ϕ der elementaren Teilchen Pionen und Nukleonen verknüpft, gelöst werden.

$$\phi = 2 G + 1 - \exp(G) \quad (67)$$

$$\phi = 2\pi HT [3m_\pi K_1(m_\pi/T) + (\lambda + \lambda^{-1}) 4m_N K_1(m_N/T)]$$

mit

$$\lambda = \exp(\mu_N/T)$$

$$\beta = 1/T$$

$$H = 2 m_0^2 / [(2\pi)^3 4B]$$

m_0 ist ein Massenparameter, der zwischen der Pionenmasse m_π und der Nukleonenmasse m_N zu:

$$m_0 = 398 \text{ MeV}$$

gewählt wird.

Durch Ableitung nach den Variablen erhalte ich die auf

Punktteilchen bezogenen thermodynamischen Größen:

$$p_{pt} = - \frac{2T}{(2\pi)^3 H} \frac{\partial G}{\partial \beta}$$

$$n_{pt} = - \frac{2T}{(2\pi)^3 H} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial G}{\partial \beta}$$

$$p_{pt} = \frac{2}{(2\pi)^3 H} \frac{\partial^2 G}{\partial \beta^2}$$

$$s_{pt} = \frac{S_{pt} + P_{pt} - \mu n_{pt}}{T}$$

Berücksichtige ich nun das gesamte dem System zur Verfügung stehende Volumen, welches nur teilweise von den Teilchen eingenommen wird, so ergeben sich für das Gesamtsystem die folgenden Beziehungen:

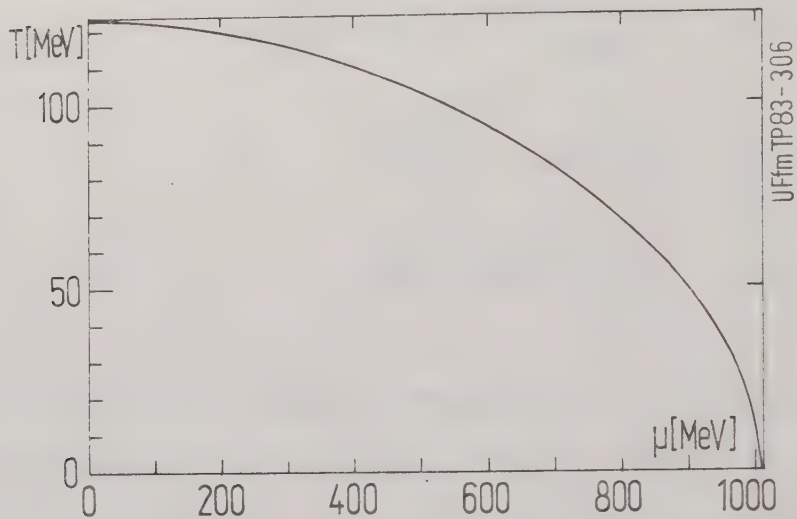
$$p = \frac{P_{pt}}{1 + \frac{S_{pt}}{4B}} \quad (68a)$$

$$n = \frac{n_{pt}}{1 + \frac{S_{pt}}{4B}} \quad (68b)$$

$$p = \frac{S_{pt}}{1 + \frac{S_{pt}}{4B}} \quad (68c)$$

$$s = \frac{S + p - \mu n}{T} \quad (68d)$$

Die Phasengrenze zwischen der Bootstrap-Kernmaterie und dem Quark-Gluon-Plasma ist in Figur 16 gezeigt.



Figur 16

Die Lösung der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung mit den hier angegebenen Zustandsgleichungen (64,66,68) ergibt keine neuen Erkenntnisse, zumal ich nur für ganz spezielle Werte des Parameters L Lösungen erhalte, welche einen Quark-Stern mit hadronischer Hülle beschreiben. Diese hadronische Hülle besitzt zudem nur Schichtdicken von wenigen Metern und trägt daher nur wenig zur Masse und zur Nukleonenzahl bei. Da die Phasengrenze innerhalb des Radius des entsprechenden reinen Quark-Sterns liegt, sind Masse, Nukleonenzahl und Radius meist geringer als die entsprechenden Werte für reine Quark-Gluon-Plasma-Sterne.

Als Ergebnis möchte ich festhalten, daß eine Nukleonenhülle, welche je nach Zustandsgleichung nur in einem kleinen Gebiet existieren kann, keinen Einfluß auf die stellare Struktur hat und nur für spezielle Zwecke, wie zur Erklärung experimenteller Beobachtungen, herangezogen werden muß. Die Situation ist analog bei Neutronensternen, die praktisch aus einem reinen Neutronen-Fermi-Gas bestehen und eine nur wenige Meter dicke Atmosphäre besitzen, welche zusätzliche Teilchen enthält ²⁹.

Falls sich in einem Neutronenstern ein Quark-Gluon-Plasma bildet, so kann aus den vorliegenden Erkenntnissen der Schluß gezogen werden, daß der gesamte Neutronenstern diesen Phasenübergang mitmachen wird und dann als Quark-Gluon-Stern vorliegt. Er wird sich aber für einen äußeren Beobachter außer durch Quark-Gluon-Plasma-spezifische Eigenschaften ^{2,30} nicht von einem Neutronenstern gleicher Masse unterscheiden. Nur der Nachweis eines kompakten stellaren Objekts, dessen Masse innerhalb des stabilen Quark-Stern-Asts aber oberhalb des Neutronensternasts liegt, würde eine Unterscheidung ohne Kenntnis der mikroskopischen Struktur ermöglichen. Die bisher bekannten Neutronensternmassen (z.B.: Vela X1 = $1,6 \pm 0,3 M_0$, Herkules X1 = $1,33 \pm 0,2 M_0$) sind voll verträglich mit dem Masse-Radius-Diagramm (Figur 5) für die übliche Bag-Konstante $B = (145 \text{ MeV})^4$.

6. Die Rolle der Bag-Konstanten in der Allgemeinen Relativitätstheorie

Vergleiche ich die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie mit kosmologischer Konstante Λ und einem beliebigen Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = - 8\pi T_{\mu\nu}$$

mit den Feldgleichungen ohne kosmologische Konstante Λ , aber mit expliziter Berücksichtigung des Energie-Impuls-Tensors des Bags, welcher aufgrund der Invarianz des Vakuums proportional zur Metrik sein muß ^{31,32},

$$T_{\mu\nu}^B = B g_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R = - 8\pi (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^B)$$

$$= - 8\pi T_{\mu\nu} - 8\pi B g_{\mu\nu}$$

so fällt sofort die formale Ähnlichkeit zwischen der kosmologischen Konstanten Λ und der Bag-Konstanten B auf. Obwohl mathematisch von derselben Struktur, bestehen zwischen beiden zwei wesentliche Unterschiede:

1. Die kosmologische Konstante Λ muß kleiner als die mittlere beobachtete Massendichte des Universums sein, da andernfalls dynamische Abweichungen beobachtbar wären,

$$\Lambda \leq 10^{-31} \text{ g/cm}^3 = 5,76 \cdot 10^{-44} \text{ MeV/fm}^3$$

während die Bag-Konstante zwischen $B = (145 \text{ MeV})^4$ und $B = (210 \text{ MeV})^4$ beträgt.

$$B = (145 \text{ MeV})^4 = 1,024 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$$

Damit ist die Bag-Konstante mindestens einen Faktor 10^{45} größer als die kosmologische Konstante. Aufgrund ihrer Kleinheit ist die kosmologische Konstante bei stellaren und galaktischen Problemen sowie beim Urknall ohne Bedeutung und daher vernachlässigbar; nur die zukünftige Entwicklung des Universums kann von ihr beeinflusst werden, vorausgesetzt die mittlere Materiedichte sinkt jemals unter die der kosmologischen Konstanten äquivalenten Energiedichte. Dennoch kann aus Gründen der Allgemeinheit die kosmologische Konstante Λ nicht generell vernachlässigt werden, da sie zur allgemeinst möglichen Form der Feldgleichungen gehört.

2. Die Bag-Konstante ist nur innerhalb eines Bags vorhanden, da außerhalb des Bags sich das echte Vakuum arrangiert. Der Energie-Impuls-Tensor des Mediums Bag $T_{\mu\nu} = B g_{\mu\nu}$ kann nur innerhalb des Bags wirken und

verschwindet außerhalb. Die kosmologische Konstante dagegen wirkt in der gesamten Raum-Zeit.

Die Folge ist, daß innerhalb eines Bags, in welchem die Bag-Konstante nicht vernachlässigt werden darf, die Raum-Zeit selbst neue Qualitäten besitzt, nämlich diejenigen einer Raum-Zeit mit kosmologischer Konstante.

Eine Auswirkung dieser neuen Qualität habe ich bereits gezeigt: Die Stabilität von Quark-Gluon-Plasma-Sternen, d.h. Sternen aufgebaut aus strahlungsartiger Materie.

Die Zustandsgleichung für strahlungsartige Materie

$$\rho_S = 3 p_S$$

führt in der Allgemeinen Relativitätstheorie zu instabilen Lösungen, während die Hinzunahme der kosmologischen Konstanten $\Lambda = 8\pi B$

$$\rho = \rho_S + \Lambda/8\pi \quad p = p_S - \Lambda/8\pi$$

zu einer Zustandsgleichung führt,

$$\rho = 3p + 4B$$

welche stabile Lösungen ermöglicht.

Das Raumgebiet, in welchem die Bag-Konstante wirken kann, ist durch die endliche Größe der Quark-Gluon-Sterne begrenzt. Das maximal mögliche Gebiet kann ich nach oben abschätzen, indem ich die Quarks und Gluonen vernachlässige und nur die Bag-Konstante berücksichtige, d.h. einen leeren Bag betrachte.

Die exakte Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen

mit Bag-Konstante B bei sphärisch symmetrischer Metrik lautet:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{8\pi B r^2}{3}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{8\pi B}{3} r^2} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (69)$$

Die Metrik besitzt einen Ereignishorizont bei

$$R_H = \sqrt{\frac{3}{8\pi B}} = 40,576 \text{ km}$$

Größere statische Gebiete mit Bag-Konstante sind nicht möglich und jede zusätzliche positive Energiedichte verringert das Gebiet.

Nehme ich eine Koordinatentransformation der Metrik in ein mitbewegtes Bezugssystem (Koordinatenzeit = Eigenzeit) vor, so erhalte ich folgende Metrik:

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\sqrt{\frac{3}{8\pi B}} t} (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (70)$$

In dieser Form der Metrik wird deutlich, daß keine statische Bag-Lösung existieren kann, falls das Gebiet größer als R_H ist. Somit stellt R_H die obere Grenze für die Ausdehnung eines statischen Bags dar.

Eine Situation, in welcher sowohl eine Bag-Konstante als auch ultrarelativistische Materie gleichzeitig vorliegen, ist im frühen Universum gegeben. Um das zeitliche Verhalten dieses Systems zu untersuchen, löse ich die Einstein-Gleichungen unter der Annahme von Homogenität und

Isotropie des Raumes. Mit dem Ansatz

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (71)$$

erhalte ich die folgenden Gleichungen zur Berechnung des zeitlichen Verhaltens des Radiusparameters $R(t)$:

$$8\pi (p - B) = - \frac{k + \dot{R}^2 + 2R\ddot{R}}{R^2} \quad (72)$$

$$8\pi (p + B) = 3 \frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \quad (73)$$

Ihre allgemeine Lösung lautet:

$$\rho(t) = 3 p(t) = \frac{c_4}{R^4(t)} \quad (74)$$

$$R(t) = \left[\frac{3k}{16\pi B} + c_2 e^{2\sqrt{\frac{8\pi B}{3}}t} + \left[\left(\frac{3k}{16\pi B} \right)^2 - c_2 \right] \frac{1}{16\pi B c_2} e^{-2\sqrt{\frac{8\pi B}{3}}t} \right] \quad (75)$$

wobei C_1 und C_2 Integrationskonstanten darstellen.

Die verschiedenen Lösungstypen klassifiziere ich entsprechend dem zeitlichen Verhalten von $R(t)$ 33 :

Monoton	M_1	$0 < R(t) < \infty$
	M_2	$R_{\min} < R(t) < \infty$
Asymptotisch	A_1	$0 < R(t) < R_S$
	A_2	$R_S < R(t) < \infty$

Instabil (Einstein-Universum)	S_1	$R(t) = R_S$
Oszillierend	O_1	$0 \leq R(t) \leq R_{\max}$

Sobald die Energiedichte den Wert $\rho \approx 16B$ unterschritten hat, muß der Bag in kleinere Einheiten zerfallen, welche dann der Expansion auf Geodätischen folgen, aber selbst nicht mehr an der Expansion teilnehmen. Damit verschwindet die "kosmologische" Konstante B aus den Feldgleichungen und der weitere zeitliche Verlauf des Radiusparameters entspricht dem eines Friedmann-Universums.

Die aufgeführten Lösungen besitzen nicht nur in der Kosmologie eine Bedeutung; auch für das Studium des Gravitationskollaps eines Quark-Sterns sind sie geeignet, da durch Anpassen der äußeren Schwarzschild-Metrik an eine der obigen Lösungen das zeitliche Verhalten eines homogenen Objekts untersucht werden kann.

7. Konvektives Gleichgewicht

Befindet sich ein System im thermischen Gleichgewicht, so heben sich die in ein Teilvolumen des Systems einströmenden Energie- und Teilchenflüsse und die aus ihm herausgehenden Flüsse auf und der Nettozustrom bzw. der Nettoabfluß ist Null. Sobald sich in einem System eine Teilchen- oder Energiesenke befindet, kann es nicht mehr im thermischen Gleichgewicht sein. Bisher habe ich die Quark-Sterne großkanonisch behandelt, d.h. sie befanden sich in einem Temperatur- und Teilchenbad. In der Natur ist dies jedoch nicht immer der Fall. Zwar ist Teilchenabstrahlung von der Oberfläche aufgrund der hohen Rotverschiebung und damit des tiefen Gravitationspotentials praktisch unmöglich, aber Photonen können das System verlassen sobald die Oberflächentemperatur größer als die Umgebungstemperatur ist. Als Konsequenz verlieren heiße Quark-Sterne Energie durch Strahlung. Solange der Verlust klein ist, d.h. die Lebensdauer des Sterns groß gegenüber dem Alter des Universums oder zumindest groß gegenüber menschlicher Beobachtungszeit, kann ich weiterhin im thermodynamischen Gleichgewicht rechnen. Bei hohen Oberflächentemperaturen ist dies nicht mehr der Fall. Daher gebe ich nun das thermische Gleichgewicht der Strahlung auf und betrachte Sterne im konvektiven Gleichgewicht, d.h. die Entropie pro Teilchen ist konstant über den ganzen Stern. Ein Quark-Stern im thermo-

dynamischen Gleichgewicht ist auch im konvektiven Gleichgewicht, wie ich bereits in Kapitel 3 gezeigt habe. Die dortigen Überlegungen sind also weiterhin gültig. In der Hülle gelten sie nicht mehr. Daher mache ich die Annahme, daß in der Hülle des Quark-Gluon-Plasma-Sterns die Entropie pro Baryon konstant sein soll und zwar entweder gleich dem im Quark-Kern geltenden Wert

$$s/n_B = F = 3 s/n_q = \frac{c_2 + 2c_3 L^2}{2c_1 + c_2 L^2} L \quad (76)$$

oder einer anderen Konstanten, welche nicht notwendig mit der des Kerns übereinstimmen muß; auf diese Möglichkeit habe ich im folgenden jedoch verzichtet. Für die innere Dynamik der stellaren Hülle bedeutet konvektives Gleichgewicht, daß zufällige Abweichungen vom Gleichgewicht durch Konvektion, d.h. Teilchenflüsse, beseitigt werden, während der Energietransport weiterhin von den Photonen getätigt wird. An der Phasengrenze zwischen Quark-Gluon-Plasma-Kern und konvektiver Hülle sollen weiterhin Druck p und Temperatur T gleich sein; das chemische Potential darf einen Sprung aufweisen. Dies bedeutet im Sinne der Gibbsschen Bedingungen, daß ich einen Teilchenstrom zulassen muß, nämlich genau denjenigen Teilchenfluß, welcher die Abweichung vom konvektiven Gleichgewicht beseitigt. Somit sind auch die Bedingungen an der Phasengrenze konsistent mit der Annahme eines konvektiven Gleichgewichts.

Ich nehme im folgenden an, daß die Hülle aus Photonen, Elektronen und einem Boltzmann-Nukleonengas besteht. Dabei stellen die Photonen den wesentlichen Beitrag zur Entropiedichte, während die Nukleonen den Hauptbeitrag der Energiedichte liefern. Zum Druck tragen überwiegend die Photonen bei. Die Elektronen sind in thermodynamischem Sinn vernachlässigbar. Ihr Zweck ist, die Ladungsneutralität des Boltzmann-Gases zu gewährleisten und die freie Weglänge der Photonen zu beschränken. Die thermodynamischen Beziehungen für Photonen lauten:

$$p = \pi^2/45 \, T^4 \quad (77a)$$

$$s = 4\pi^2/45 \, T^3 \quad (77b)$$

$$\rho = \pi^2/15 \, T^4 \quad (77c)$$

Für das Nukleonengas verwende ich die relativistischen Boltzmann-Gleichungen (64). Zwischen Druck und Teilchendichte eines Boltzmann-Gases besteht stets folgende Beziehung:

$$p = n \, T \quad (78)$$

Die Bedingung konstanter spezifischer Entropie F liefert die Teilchenzahldichte n_b :

$$F = \frac{4\pi^2/45 \, T^3}{n_b} \quad (79)$$

$$\rightarrow n_b = \frac{4\pi^2}{45 F} T^3 \quad (80)$$

Daraus folgt die Zustandsgleichung:

$$p = p_\gamma + p_b = \pi^2/45 T^4 + 4\pi^2/(45 F) T^4 \quad (81)$$

$$p = p_\gamma + p_b = \frac{\pi^2}{45} T^4 + \frac{m^2 T^2}{\pi^2} e^{\frac{\mu}{T}} \left[3 K_2\left(\frac{m}{T}\right) + \frac{m}{T} K_1\left(\frac{m}{T}\right) \right] \quad (82)$$

Auflösen von Gleichung (81) nach T liefert:

$$T = \left(\frac{45 F}{\pi^2 (4+F)} \right)^{1/4} p^{1/4} \quad (83)$$

und damit die gesuchte Zustandsgleichung $p(p)$:

$$p = 3 p + \frac{8 \pi^2 T^4(p) \left[3 K_2\left(\frac{m}{T(p)}\right) + \frac{m}{T(p)} K_1\left(\frac{m}{T(p)}\right) \right]}{45 F_2 K_2\left(\frac{m}{T(p)}\right)} \quad (84)$$

Die Phasengrenze zum Quark-Gluon-Plasma ist leicht zu finden durch Gleichsetzen der beiden Drücke $p_q = p$ und Auflösen der entstandenen Gleichung nach der Temperatur.

$$T = \frac{B^{1/4}}{\left(\frac{c_1}{81} L^{-4} + \frac{c_2}{3} L^{-2} + c_3 - \frac{\pi^2}{45} \frac{4+F}{F} \right)^{1/4}} \quad (85)$$

Durch Vorgabe von L und F kann ich T und p an der Phasengrenze berechnen. Der höchste Wert von T wird für L gegen unendlich angenommen. Dies ist zugleich der

höchste Druck an der Phasengrenze. Für kleinere Temperaturen und Drücke wandert die Phasengrenze nach außen und ist praktisch mit dem ursprünglichen Bag-Rand identisch. Bei L und F gegen Unendlich erhalte ich mit der üblichen Bag-Konstanten $B = (145 \text{ MeV})^4$:

$$T_{pg} = 123,21 \text{ MeV}$$

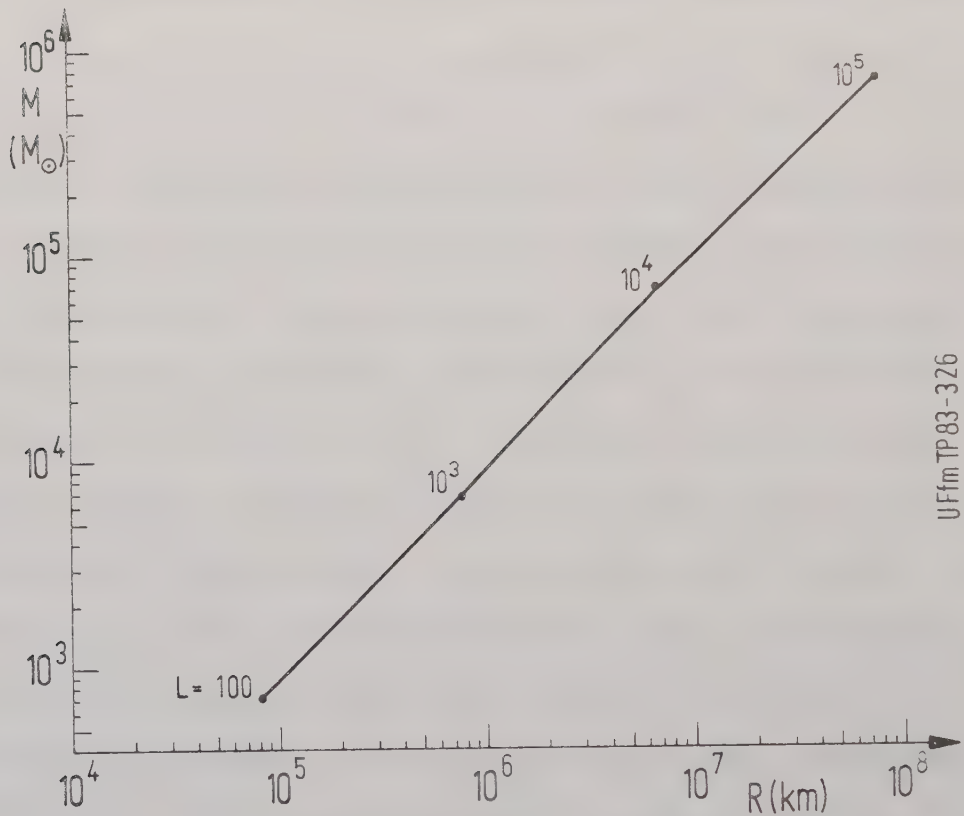
$$p_{pg} = 0,114 \text{ B}$$

Für den massereichsten Quark-Stern liegt die Phasengrenze etwa 400 m vor dem ursprünglichen Rand, d.h. bei 10,6 km anstelle der ursprünglichen 11 km. Für alle kleineren Werte von L liegt die Phasengrenze noch näher am ehemaligen Rand. Ein Quarkstern, der von einer konvektiven Hülle umgeben ist, bleibt also im wesentlichen in seinen Abmessungen und seiner Masse erhalten. Da zu jedem Quark-Stern das gesamte L -Spektrum möglich ist, kann jeder dieser Sterne Kern eines konvektiven Sterns sein. Ich kann daher die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung zu festem L bei verschiedenen zentralen Dichten lösen oder bei fester zentraler Dichte den L -Parameter verändern und das Masse-Radius-Diagramm berechnen. Solange der zentrale Quark-Stern stabil ist, bleibt der gesamte konvektive Stern stabil gegenüber kleinen radialen Oszillationen ³⁴, da die Zustandsgleichung der stellaren Hülle derjenigen der supermassiven Sterne sehr ähnlich

ist ³⁵. Auch gewöhnliche Sterne im Strahlungsgleichgewicht sind im konvektiven Gleichgewicht und stabil, solange der Strahlungsdruck nicht den Gravitationsdruck übersteigt. Der auslösende Mechanismus bei Supernovae-Explosionen ist der Gravitationskollaps des zentralen Kerns ³⁶. Sobald durch Fusion keine Energie mehr gewonnen werden kann, kann der Gravitationsdruck nicht mehr durch den Strahlungsdruck balanciert werden und die Masse des Kerns überschreitet die maximale stabile Masse. Bei den konvektiven Sternen mit Quark-Gluon-Plasma-Kern ist die Phasengrenze stabil und der Kern ebenfalls; solange die Temperatur an der Phasengrenze konstant ist, balanciert ihr Druck den Druck der äußeren Hülle. Den mikroskopischen Mechanismus, welcher Abweichungen vom Gleichgewicht korrigiert, diskutiere ich im nächsten Kapitel im Zusammenhang mit der inneren Energieerzeugung im Quark-Gluon-Plasma-Kern der konvektiven Sterne. Schwankungen einer thermodynamischen Größe in einem System im thermischen Gleichgewicht sind proportional dem Reziproken der Wurzel aus der Teilchenzahl, d.h. $\Delta x/x \approx 1/\sqrt{N}$. Bei großen Teilchenzahlen, wie sie hier vorliegen, kann praktisch nur der Gleichgewichtszustand vom System realisiert werden.

Die Lösung der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung erfolgt mit der Zustandsgleichung des Quark-Gluon-Plasmas bis zur Phasengrenze und ab dort mit der konvektiven Zustandsgleichung (84) bis zum Rand. Je nach zentraler Dichte erhalte ich einen anderen Quark-Gluon-Kern:

geeignete Dichten sind jene, bei welchen ich einen stabilen Quark-Gluon-Stern als Kern des konvektiven Sterns erhalte. Die lokale Temperatur kann ich mittels Gleichung (83) berechnen. In Figur 17 ist die Masse als Funktion des Radius für verschiedene Parameter L aufgetragen.



Figur 17

Als zentrale Dichte habe ich $\rho(0) = 19 \text{ B}$ gewählt; dies entspricht einem Quark-Gluon-Stern der Masse $M = 2 M_{\odot}$ mit einem Radius $R = 11 \text{ km}$. Ändere ich bei gleichem Parameter L die zentrale Dichte, so erhalte ich die

Figur 2 äquivalenten Masse-Radius-Kurven. Für größere Werte des Parameters L setzt sich Figur 17 fort.

Der Rand des konvektiven Sterns ist durch $p(R) = 0$ nicht gut beschrieben, da als Konsequenz die Temperatur $T(R)$ ebenfalls Null wird und daher ein äußerer Beobachter einen kalten Stern sehen würde. Sobald die Dichte der stellaren Hülle so weit absinkt, daß die freie Weglänge der Photonen vergleichbar mit der verbleibenden Dicke der Kugelschale des einen Stern mit $p(R) = 0$ umhüllenden Mediums wird, können die Photonen relativ leicht das System bzw. den Stern verlassen. In dieser Zone existiert kein konvektives Gleichgewicht mehr; der Sternrand ist erreicht. Da die Photonen jetzt durch Stöße keine Energie mehr verlieren, bleibt ihre Energie innerhalb der Reichweite konstant, während eine noch vorhandene Hülle immer dünner wird, so daß die freie Weglänge weiter zunimmt. Nach innen ist die Dichte der stellaren Hülle größer und damit die Reichweite bzw. die freie Weglänge der Photonen geringer; sie bleiben innerhalb der Hülle im konvektiven Gleichgewicht. Der Rand des Sterns läßt sich auf diese Weise nicht scharf definieren. Dies ist aber kein Problem, solange die Oberflächendicke, definiert durch die dortige freie Weglänge der Photonen, sehr klein ist im Vergleich zum Gesamtradius des Sterns und die dort herrschende Dichte so gering, daß der Beitrag der Randschicht zur asymptotischen Masse und zur Nukleonenzahl ebenfalls vernachlässigbar ist.

Die freie Weglänge berechne ich mittels des Thomson-Streuquerschnitts für Elektron-Photon-Streuung. Der gesamte Wirkungsquerschnitt beträgt:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{3}{4} \sigma_0 \left\{ \frac{1+\gamma}{\gamma^3} \left[\frac{2\gamma(1+\gamma)}{1+2\gamma} - \ln(1+2\gamma) \right] + \frac{1}{2\gamma} \ln(1+2\gamma) - (1+3\gamma)/(1+2\gamma)^2 \right\} \quad (86)$$

$$\text{mit } \sigma_0 = 8\pi/3 r_0^2 = 66,525 \text{ fm}^2$$

$$r_0 = e^2/(4\pi m) = 2,82 \text{ fm}$$

$$\gamma = \omega/m_e$$

$$w : \text{Photonenenergie}$$

$$m_e = 511 \text{ keV} : \text{Elektronenmasse}$$

Für Photonenenergien kleiner als die Elektronenmasse, d.h. $\omega < m_e$ gilt folgende Näherung:

$$\sigma = \sigma_0 (1-2\gamma) \rightarrow \sigma_0 \quad (87)$$

Die freie Weglänge eines Photons in einem Medium mit der Elektronendichte n_e beträgt:

$$\lambda = 1/(n_e \sigma) \quad (88)$$

Die Elektronenzahldichte setze ich gleich der Baryonenzahldichte, d.h. es liege ein Wasserstoffgas ($g = 2$) vor. Die in einem realen stellaren Plasma vorhandene Elektronendichte hängt von der chemischen Zusammensetzung des Plasmas ab: bei Temperaturen über $T \approx 1 \text{ MeV}$

setze ich $g = 4$, d.h. $n_e = 1/2 n_D$. Außerdem habe ich weitere Streuprozesse vernachlässigt, da deren Wirkungsquerschnitte sicher kleiner als derjenige der Elektron-Photon-Streuung sind (Photon-Proton-Streuung, Photon-Photon-Streuung).

Sobald die Dichte der Hülle auf einen Wert abgesunken ist, welcher den Photonen das Verlassen des Systems ermöglicht, beende ich die Rechnung und erhalte einen Stern mit Radius R , Masse M und Oberflächentemperatur T . Der gesamte Stern besitzt damit eine Leuchtkraft L :

$$L = 4\pi \sigma_{SB} R^2 T^4 \quad (89)$$

mit $\sigma_{SB} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4)$

und verliert Energie durch Strahlung. Dieser Verlust muß durch eine innere Energiequelle ausgeglichen werden, da sonst die Voraussetzungen für konvektives Gleichgewicht nicht für längere Zeit erfüllbar sind.

8. Baryonenzerfall induziert durch magnetische
Monopole als Energiequelle für Sterne im
konvektiven Gleichgewicht:

Quasare

Würde als Energiequelle der konvektiven Sterne einzig die Kernfusion zur Verfügung stehen, so würde sich die ursprüngliche Materie allmählich zu Eisen- und Nickelnukleonen fusionieren und auf diese Weise etwa 0,7% der gesamten Ruhemasse in Energie verwandeln. Dann würde eine Abkühlung des Sterns einsetzen, der Stern würde schrumpfen und schließlich kollabieren, da die Gravitationsanziehung nicht mehr durch den Strahlungsdruck balanciert werden würde. Außerdem wäre die Lebensdauer eines solchen Sterns sehr klein, da der wesentliche Anteil der Gesamtenergie weiterhin in Form von Ruhemasse vorliegt.

Aufgrund der Verletzung der Baryonenzahlerhaltung katalysiert durch magnetische Monopole ^{37,38,39,40,41} besteht die Möglichkeit, die gesamte Ruhemasse eines schweren Teilchens in leichte Teilchen und Energie zu verwandeln. Der Hauptprozeß $p, n + M \rightarrow \text{Mesonen} + \text{Leptonen} + M$, welcher im Quark-Gluon-Plasma abläuft, liefert leichte Teilchen hoher Energie. Bei einer gegebenen Zahl Monopole sowie Quarks und Leptonen stellt sich ein Reaktionsgleichgewicht ein. Eine Verschiebung des Gleichgewichts aufgrund des Energieverlusts an der Bag-Oberflä-

che wird durch einen Baryonenteilchenfluß von der Hülle in den Quark-Gluon-Kern ausgeglichen. Auf diese Weise kann die gesamte Ruhemasse in Energie verwandelt werden. Auch die Stabilität des Quark-Gluon-Kerns gegenüber Störungen kann ich nun diskutieren: Falls der Druck an der Phasengrenze sinkt, so können Baryonen aus der Hülle in das Quark-Gluon-Plasma fallen. Dadurch erhöht sich die Baryonendichte und dementsprechend die Energieproduktion durch Baryonenzerfall. Dies bewirkt eine Druckerhöhung an der Phasengrenze und verhindert einen weiteren Baryonenzufluß. Erhöht sich andererseits der Druck über den Gleichgewichtsdruck, so verhindert dies den Zustrom weiterer Baryonen und die sich verringernde Energieproduktion verkleinert den Druck.

Da über magnetische Monopole noch keine experimentellen Daten vorliegen, verwende ich im folgenden die in den angegebenen Referenzen benutzten Zahlenwerte. Jedoch sind die damit erzielten Ergebnisse unkritisch bezüglich einer Änderung der Basisdaten selbst um mehrere Größenordnungen.

Als Wirkungsquerschnitt für den durch magnetische Monopole induzierten Baryonenzerfall setze ich an:

$$\sigma_M = 3,88 \cdot 10^{-6} / \beta \text{ fm}^2 \quad (90)$$

wobei β die relative Geschwindigkeit zwischen den Monopolen und den Fermionen bezeichnet. Da die Masse der magnetischen Monopole etwa $m_M \approx 10^{16} \text{ GeV}$ oder mehr

beträgt und diese sich im thermischen Gleichgewicht mit dem Quark-Gluon-Plasma befinden, beträgt ihre Geschwindigkeit bei $T \approx 150 \text{ MeV}$ etwa $v_M \approx 4 \cdot 10^{-9}$. Damit ist ein Entweichen aus dem Quark-Gluon-Kern nicht möglich, da die Fluchtgeschwindigkeit bei $M = 2 M_0$ und $R = 11 \text{ km}$ etwa $v_{\text{esc}} \approx 0,74$ beträgt.

Die freie Weglänge der magnetischen Monopole in Materie der Baryondichte n_b beträgt dann:

$$\lambda = 1/(n_b \sigma_M) = 2,577 \cdot 10^5 \beta / n_b \quad (91)$$

Die Gesamtzahl der Wechselwirkungen mit Baryonenzerfall ist nun durch

$$\Gamma = 3,88 \cdot 10^{-6} n_b \quad (92)$$

gegeben und damit unabhängig von β .

Bei jedem Zerfall wird eine Baryonenmasse an Energie frei, d.h. die Energieerzeugungsrate beträgt:

$$Q = m_b \Gamma \quad (93)$$

je Monopol und bei N_M Monopolen insgesamt:

$$Q_{\text{tot}} = m_b \Gamma N_M \quad (94)$$

Diese Leistung muß gleich der abgestrahlten Leistung plus der durch die gravitative Rotverschiebung zu lei-

stenden Arbeit sein. Damit bin ich in der Lage, die benötigte Anzahl Monopole zu berechnen sowie das Verhältnis Zahl der Monopole zur Baryonenzahl.

Im folgenden gebe ich ein Beispiel für einen konvektiven Stern mit heißem Quark-Gluon-Plasma-Kern und magnetischen Monopolen:

Gesamtmasse	$M = 6,6345 \cdot 10^5 M_0$
Radius	$R = 7,692 \cdot 10^7 \text{ km}$
Masse des Kerns	$M_{\text{core}} = 1,9 M_0$
Radius des Kerns	$R_{\text{core}} = 11 \text{ km}$
Oberflächentemperatur	$T = 72,398 \text{ eV}$
Leuchtkraft	$L = 5,3078 \cdot 10^{12} L_0$
Gravitationsrotverschiebung	$z = 0,013$
Oberflächendichte	$n_b = 2,315 \cdot 10^{-26} \text{ fm}^{-3}$
Freie Weglänge	$\lambda = 6,4958 \cdot 10^5 \text{ km}$
Bag-Oberflächentemperatur	$T_B = 123 \text{ MeV}$
Zentraltemperatur	$T(0) = 182,2 \text{ MeV}$
L-Parameter	$T/\mu_q = 10^5$
Zentralenergiedichte	$\rho(0) = 7,366 \cdot \rho_0$
Zahl der Monopole	$N_M = 9,72 \cdot 10^{30}$
Monopole pro Baryon	$N_M/N_b = 1,2 \cdot 10^{-32}$
Gesamtmonopolmasse	$M_M = 1,73 \cdot 10^{20} \text{ kg}$
Lebensdauer	$t_1 = 1,83 \cdot 10^7 \text{ Jahre}$

Die benötigte Zahl der Monopole ist klein verglichen mit der Zahl der Baryonen; auch die in ihnen konzentrierte Energie ist sehr gering verglichen mit der Masse des

Quark-Gluon-Plasmas. Die Zustandsgleichung des Quark-Gluon-Plasmas wird deshalb nicht beeinflusst und auch Masse und Radius der Objekte hängen nicht von den Monopolen ab, d.h. ihr Einfluß auf die stellare Struktur ist gering; sie dienen einzig als Katalysatoren zur Baryonenverbrennung.

Bisher habe ich die magnetische Ladung der magnetischen Monopole vernachlässigt. Dies ist sicher gerechtfertigt im Hinblick auf die stellare Struktur, da die Energie des Magnetfeldes die Ruhemasse der Monopole nicht übersteigen kann. Für einen äußeren Beobachter bilden die Sterne mit magnetischen Monopolen die Quelle eines radialen Magnetfeldes, solange eine Asymmetrie zwischen den Monopolen und den Antimonopolen besteht. Dies setze ich im folgenden voraus. Sollten gleich viele Monopole wie Antimonopole im Stern existieren, so würden sie sich im Laufe der Zeit durch Paarvernichtung selbst eliminieren und es würde kein radiales Magnetfeld existieren.

Die Metrik im Außenraum eines statischen sphärisch symmetrischen Sterns mit radialem Magnetfeld ist analog der Metrik eines elektrisch geladenen Sterns, nämlich der Reissner-Nordström-Metrik. Zur Herleitung gehe ich vom dualen elektrischen Feldtensor ${}^*F_{\mu\nu}$ aus:

$${}^*F_{\mu\nu} = \frac{g}{r^2} e^{\frac{r+\lambda}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Energie-Impuls-Tensor ist wie folgt zu berechnen:

$$T_{\mu\nu}^M = {}^*F_{\mu\kappa} {}^*F_{\nu}^{\kappa} + 1/4 g_{\mu\nu} {}^*F_{\alpha\beta} {}^*F^{\alpha\beta}$$

Dies liefert:

$$T_{\mu\nu}^M = 1/2 g^2/r^4 \text{ diag}(e\nu, -e\lambda, r^2, r^2 \sin^2\theta) z$$

Die Einstein-Gleichungen im Vakuum mit Magnetfeld lauten dann:

$$R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

Diese Gleichungen werden gelöst von folgender Metrik:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{4\pi a^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{4\pi a^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Das Vorhandensein eines Magnetfeldes, welches unter Umständen noch verformt wird durch Rotation des Sterns ("magnetische Kerr-Newman-Metrik"), führt zu Synchrotronstrahlung, da sich elektrisch geladene Teilchen entlang der Feldlinien spiralen und dabei Energie in Form von polarisierter Synchrotronstrahlung verlieren.

Die Oberflächenrotverschiebung des im Beispiel verwendeten Sterns ist klein verglichen mit den meisten bei Quasaren gemessenen Rotverschiebungen ($z_{\text{OQ172}} = 3,53$; $z_{\text{OH471}} = 3,40$; $z_{\text{3C273}} = 0,158$; $z_{\text{3C9}} = 2,012$;

$z_{PKS\ 0237-23} = 2,223$; $z_{4C05.34} = 2,877$). Dies bedeutet, daß die Oberflächenrotverschiebung nicht ausreicht, um die gemessene Rotverschiebung zu erklären und eine kosmologische Rotverschiebung entsprechend der großen Entfernung hinzukommen muß. Bei nahen Quasaren geringer Rotverschiebung sollte die gravitative Rotverschiebung berücksichtigt werden. Als Folge dieser Korrektur wird es zu einer geringfügigen Verkleinerung der Leuchtkraft kommen. Die überwiegend kosmologische Rotverschiebung weist auf eine Entstehung in der Frühzeit der kosmologischen Entwicklung hin. So könnte sich der Quark-Gluon-Plasma-Kern gebildet haben, als die Energiedichte des Universums unter Werte von $\approx 20\ B$ gefallen war. Dann entkoppelten sich die Quark-Gluon-Kerne von der Expansion und konnten beginnen, die sie umgebende Materie gravitativ anzuziehen und zu akkumulieren. Im Standardmodell des Kosmos fand die Entkopplung etwa 10^{-5} Sekunden nach dem Urknall statt. Zu dieser Zeit können jedoch noch eine große Anzahl magnetischer Monopole als Relikte noch früherer Zeiten, in welchen die Temperatur die Ruhemasse der Monopole überstieg, übrig geblieben sein, und welche nun im Quark-Gluon-Plasma eingeschlossen werden. Ein Baryonenzerfall setzt jedoch aufgrund der noch herrschenden hohen Umgebungstemperaturen nicht ein. Erst wenn die Umgebungstemperatur unterhalb der Oberflächentemperatur des sich durch fortgesetzte Massenakkretion gebildeten konvektiven Sterns gefallen ist, verschiebt sich das Reaktionsgleichgewicht zuungunsten

der Baryonen und der zur Aufrechterhaltung des konvektiven Gleichgewichts notwendige Zerfall setzt ein. Ein zweiter denkbarer Entstehungsprozess der konvektiven Sterne mit Quark-Gluon-Plasma-Kern könnten kollabierende Sterne sein, deren Masse über der kritischen Masse für Neutronensterne liegt oder die kalten stabilen Quark-Gluon-Sterne. Aufgrund der großen Rotverschiebung besitzen sie die Möglichkeit, Teilchen einzufangen und gravitativ zu binden. Dies gilt insbesondere für herumfliegende magnetische Monopole, welche erstens aufgrund ihrer hohen Ruhemasse keine Fluchtgeschwindigkeit erreichen können und zweitens aufgrund der hohen Baryonendichte auch nur sehr kleine freie Weglängen innerhalb der Quark-Sterne besitzen.

Ist der den Stern umgebende Raum im wesentlichen leer, so werden die Monopole langsam aber sicher die Baryonenzahl verringern. Die dabei freiwerdende Energie heizt das Quark-Gluon-Plasma auf und führt zu einer Abstrahlung von Photonen und Neutrinos an der Oberfläche, d.h. der Quark-Stern leuchtet, und zwar je nach Anzahl der Monopole in einem anderen Spektralbereich. Ein sich durch Kollaps bildendes Quark-Gluon-Plasma wird bereits bei seiner Entstehung eine hohe Temperatur besitzen, da ein Kollaps als dissipativer Effekt entropieerzeugend ist und außerdem die gesamte gravitative Bindungsenergie frei wird und zum Aufheizen zur Verfügung steht. Außerdem kann in diesem Fall die nackte Masse klein sein, da bei endlicher Entropie zur Bildung eines stabilen Quark-

-Gluon-Sterns eine verringerte Masse nötig ist und damit eventuell bei einem Kollaps das Neutronenstern-Stadium übersprungen wird.

Sollten sich in der Umgebung des Quark-Gluon-Sterns weitere Sterne oder Gaswolken befinden, so wird der Quark-Gluon-Stern ähnlich den Neutronensternen und schwarzen Löchern beginnen, diese Materie anzuziehen. Dies führt bei rotierenden Sternen zur Bildung einer Akkretionsscheibe, von welcher dann Materie auf den Quark-Stern stürzt. Diese lokale Aufheizung ("hot spot") ist als Röntgenquelle bei Neutronensternen bekannt und würde auch bei Quark-Sternen auftreten, ebenso falls der Quark-Stern mit einem oder mehreren gewöhnlichen Sternen ein Doppel- oder Mehrfachsternsystem bildet und von diesen ein Gasstrom auf den Quark-Stern stürzt.

Falls sowohl die Materiekonzentration in der unmittelbaren Nähe des Quark-Gluon-Sterns als auch die Anzahl der von ihm eingefangenen magnetischen Monopole so groß sind, daß sich ein Strahlungstern im Gleichgewicht bildet, könnten auch Quasare bzw. superluminöse stellare Objekte, welche nicht als Relikte aus der Frühzeit des Kosmos anzusehen wären, existieren. Ein möglicher Kandidat scheint mir dabei das in der Großen Magellanschen Wolke als Zentralobjekt des 30-Doradus-Nebels entdeckte sternähnliche Objekt R 136 a ⁴² zu sein, welches eine Masse von $M \approx 2000 M_0 \dots 3000 M_0$ besitzt und als supermassiver Stern mit Quark-Gluon-Plasma-Kern verstanden werden kann.

Um die im Spektrum der Quasare zu beobachteten Emissionslinien und Absorptionslinien zu erklären, wird im allgemeinen angenommen, daß der Quasar von Staub- und Gaswolken umgeben ist. Damit ist eine befriedigende Erklärung der Feinstruktur des Spektrums zu erreichen. Die außerdem beobachtete teilweise Polarisierung der Spektrallinien ist im hier vorgeschlagenen Modell eine simple Folge der im Quark-Gluon-Plasma-Kern eingeschlossenen Monopole, d.h. des von ihnen erzeugten Magnetfelds.

9. Diskussion der erzielten Ergebnisse

Bereits in den vorangegangenen Kapiteln habe ich mehrfach die Eigenschaften der konvektiven, superluminösen Sterne mit Quark-Gluon-Plasma-Kern mit den über Quasare bekannten Fakten ^{43,44} verglichen. Dabei zeigte sich die enge Verwandtschaft zwischen beiden Objekten; im Einzelnen zeigte sich dies besonders bei:

1. Die Leuchtkraft der konvektiven Sterne mit Quark-Gluon-Plasma-Kern beträgt je nach spezifischer Entropie bis zu maximal:

$$L_{\max} = 10^{24} L_0$$

für den Quark-Gluon-Kern maximaler Masse und maximaler Oberflächentemperatur (Kapitel 3). Damit liegt die mögliche Leuchtkraft noch weit über derjenigen der bekannten Quasare, welche zwischen $L \approx 10^{10} L_0$ und $L \approx 10^{14} L_0$ betragen, so daß Leuchtkräfte dieser Größenordnung leicht erreichbar sind. Im folgenden beziehe ich mich auf das Modell in Kapitel 8 und die dabei erzielten Werte. Die Leuchtkraft betrug $L \approx 5 \cdot 10^{12} L_0$ und liegt damit im interessanten Bereich, so daß ich die weiteren Ergebnisse dieses Modells mit den experimentellen Beobachtungen vergleichen werde.

2. Das Energieäquivalent der Gesamtmasse der konvektiven Sterne mit Quark-Kern stimmt in der Größenordnung mit

den Abschätzungen zur in einem Quasar enthaltenen Energie überein, welche in der Größenordnung von $M \approx 10^6 M_0$ liegen sollte.

3. Die Energiequelle der konvektiven Sterne mit Quark-Gluon-Kern ist der durch magnetische Monopole induzierte Baryonenzerfall, d.h. die Gesamtmasse kann in Energie umgewandelt und abgestrahlt werden. Wäre die einzige zur Verfügung stehende Energiequelle die Fusion, so müßte die Ruhemasse eines Quasars etwa einen Faktor 10^3 größer als das Energieäquivalent sein, d.h. $M \approx 10^9 M_0$.

4. Der Radius der konvektiven Sterne mit Quark-Kern liegt bei etwa 4 Lichtminuten, d.h. schnelle Variationen der Leuchtkraft sind durch geringfügige Oberflächentemperaturschwankungen oder Radiuschwankungen möglich. Beobachtete Schwankungen bis herunter in den Stundenbereich sowie radioastronomische Messungen des abstrahlenden Kerngebiets zeigen, daß die Abmessungen der Quasare in derselben Größenordnung liegen.

5. Das Spektrum der Quasare liegt von allen astronomischen Objekten am nächsten der Kurve, welcher ein heißer schwarzer Körper hat, d.h. ein thermisches Spektrum. Dies stimmt mit dem Spektrum der konvektiven Sterne überein.

6. Aufgrund des Magnetfeldes, erzeugt von den Monopolen, sollte das Spektrum der konvektiven Sterne mit Quark-Gluon-Kern Synchrotronstrahlung, teilweise polarisiert, aufweisen, d.h. im Radiobereich oder auch darüber ein

nichtthermisches Spektrum zeigen. Genau dies wird bei Quasaren beobachtet.

7. Im Spektrum der Quasare vorhandene Emissions- und Absorptionslinien werden durch die umgebende Gas- und Staubwolken erklärt. Dies ist natürlich auch für die konvektiven Sterne mit Quark-Gluon-Kern der Fall.

8. Die wahrscheinliche Entstehung der Quark-Gluon-Plasma-Kerne als Zentrum der konvektiven Sterne in der Frühzeit des Kosmos impliziert hohe Rotverschiebungen. Auch dies steht im Einklang mit den bei Quasaren gemachten Beobachtungen.

Den Schluß, welchen ich aus dieser Übereinstimmung ziehe, lautet: Quasare sind superluminöse, konvektive, massereiche Sterne mit einem heißen, dichten Quark-Gluon-Plasma-Kern, welcher die bei seiner Entstehung in der Frühphase des Kosmos vorhandenen magnetischen Monopole eingeschlossen hat.

Reine Quark-Gluon-Sterne ^{45,46,47,48} ohne konvektive Hülle sind im wesentlichen äquivalent zu den Neutronensternen und von diesen experimentell schwer oder überhaupt nicht zu unterscheiden.

10. Ausblick

Das in dieser Arbeit vorgeschlagene Modell für Quasare löst das zur Zeit größte Problem in Zusammenhang mit Quasaren, deren Energieproblem. Als Energiequelle wird der durch magnetische Monopole katalysierte Baryonenzerfall vorgeschlagen. Die Lösungen der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie liefern unter der Annahme eines zentralen Quark-Gluon-Plasmas und einer konvektiven, heißen hadronischen Hülle ein selbstkonsistentes Modell, welches mit seinen Werten mit den für Quasare vermuteten Daten in Übereinstimmung steht. Der drei benötigten Parameter sind die spezifische Entropie, die zentrale Energiedichte (oder gleichwertig der zentrale Druck oder die Zentraltemperatur) und die Anzahl der magnetischen Monopole. Sind deren Werte vorgegeben, folgen alle anderen Größen wie Masse, Radius und Leuchtkraft. Die stellare Struktur ist dabei nicht von den Monopolen abhängig; die Struktur des Quark-Gluon-Plasma-Kerns sogar nur von der zentralen Energiedichte.

Die notwendigen Parameter kann ich auch umgekehrt aus der beobachteten Leuchtkraft und der geschätzten Masse berechnen; als einzige (kleine) Willkür bleibt die zentrale Energiedichte, welche ich so wählen kann, daß das gesamte Objekt stabil gegenüber radialen Oszillationen bleibt.

Für die weitere Forschung wäre es notwendig, für möglichst viele der zur Zeit bekannten Quasare (ca. 1500) eine Modellrechnung durchzuführen und sie mit den soweit bekannten experimentellen Werten zu vergleichen oder Aussagen über noch nicht gemessene Werte zu machen und auf diese Weise die vorgeschlagene Modellvorstellung zu erhärten.

Im Zusammenhang mit den Quark-Gluon-Plasma-Sternen ohne Hülle wäre es notwendig, nach Indikatoren für das Quark-Gluon-Plasma zu suchen, welche es ermöglichen, auch über kosmische Entfernungen die Quark-Sterne von den Neutronensternen zu unterscheiden. Gerade in diesem Zusammenhang könnten Rotation, Leuchtkraft und Spektrum, Trägheitsmoment oder Magnetfelder wichtig werden.

11. Anhang: Rotierende Sterne

Um den Einfluß der Rotation auf die stellare Struktur zu bestimmen, transformiere ich die Metrik mittels der Transformation:

$$\phi \rightarrow \phi - \Omega(r) t$$

ins mitrotierende Koordinatensystem und erhalte, indem ich nur die Terme erster Ordnung in Ω mitnehme:

$$\begin{aligned} ds^2 = & e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ & + 2\Omega r^2 \sin^2 \theta d\phi dt \end{aligned}$$

Diese Metrik ist als linearisierte Form der Kerr-Metrik bekannt, welche in Boyer-Lindquist-Koordinaten lautet:

$$\begin{aligned} ds^2 = & dt^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}{r^2 + a^2 - 2Mr} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) d\vartheta^2 \\ & - (r^2 + a^2) \sin^2 \vartheta d\varphi^2 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} (dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi)^2 \end{aligned}$$

mit $a = J / M$

wobei J der von einem äußeren Beobachter gemessene Gesamtdrehimpuls der Quelle ist.

Verwende ich die linearisierte Kerr-Metrik als Ansatz für mein Variationsverfahren, so erhalte ich ebenfalls die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung, d.h. in erster Ordnung in Ω bleiben die Gleichungen unverändert. Dies

stimmt mit dem von Hartle erzielten Resultat überein, nach dem die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung auch die Struktur der rotierenden Sterne bis einschließlich erster Ordnung in Ω eindeutig bestimmt und erst in zweiter Ordnung Änderungen auftreten ^{49,50}.

Nachdem ich die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung gelöst habe und des weiteren die metrischen Koeffizienten e^ν und e^λ berechnet habe, kann ich die 03-Komponente der Einstein-Gleichungen lösen und damit die noch unbekannte Funktion $\Omega(r)$ berechnen. Die aus den Feldgleichungen resultierende Differentialgleichung zweiter Ordnung ("Hartle-Gleichung") lautet:

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left(r^4 e^{-\frac{r+\lambda}{2}} \frac{d}{dr} (\omega - \Omega) \right) + \frac{4}{r} \frac{d}{dr} \left(e^{-\frac{r+\lambda}{2}} \right) (\omega - \Omega) = 0$$

wobei ω die konstante Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, welche ein äußerer Beobachter sieht.

Selbst bei extrem schnell rotierenden Neutronensternen (Pulsperiode ≤ 30 msec), deren Massen und Radien von derselben Größenordnung wie die der hier betrachteten Quark-Gluon-Sterne ist, ist die linearisierte Kerr-Metrik noch gerechtfertigt ⁵¹.

Die Berücksichtigung der Rotation realer stellarer Objekte ist daher auch bei den Quark-Gluon-Plasma-Sternen durch Lösen der Hartle-Gleichung möglich. Da die

Rotation andererseits nicht in die Strukturgleichungen eingeht und daher die auf endlicher Entropie beruhenden Effekte nicht beeinflußt, habe ich auf diese Rechnung verzichtet. Bei Rechnungen, welche eine realistische Beschreibung eines konkreten Modells anstreben, ist es jedoch angebracht, die Rotation zu berücksichtigen und die Hartle-Gleichung zu lösen. Gerade die Bildung von Jets, d.h. bevorzugten Achsen, in welchen Energie oder Teilchen emittiert werden, könnte durch Rotation verursacht oder zumindest stark beeinflußt werden.

Anhang: Thermodynamisches und konvektives Gleichgewicht

Die Konsequenzen, welche sich aus den Zuständen eines Systems, charakterisiert durch thermodynamisches oder konvektives Gleichgewicht, ergeben, möchte ich hier erläutern, um auf diese Weise zu einer plausiblen Begründung der Wahl des einen oder anderen Gleichgewichtszustands zu gelangen. Zur Vereinfachung vernachlässige ich zunächst die gravitative Wechselwirkung und betrachte ein System von N Teilchen mit Gesamtentropie S und Gesamtenergie E , eingeschlossen in einem Volumen V mit durchlässigen Wänden. Das System befinde sich in einem Wärmebad der Temperatur T und einem Teilchenreservoir mit chemischem Potential μ . Das System ist im thermodynamischen Gleichgewicht, wenn in jedem Teilvolumen identische Bedingungen herrschen, d.h. Temperatur und chemisches Potential an jeden Ort im System sind gleich. Stehen die Teilvolumina in Verbindung miteinander, so stellt sich kein Teilchen- und Entropiefluß zwischen ihnen ein, da kein Potentialgefälle vorhanden ist. Es gibt somit auch keinen Energiefluß im System. Da sowohl die Entropiedichte als auch die Teilchendichte konstant sind, ist auch die spezifische Entropie konstant und das gesamte System somit auch im konvektiven Gleichgewicht. Betrachte ich nun als Beispiel für ein System im konvektiven Gleichgewicht das isentrope Strömen einer Flüssigkeit. Teilchenzahl und Entropie in einem Volumenelement

der Flüssigkeit sind konstant, d.h. die Flüssigkeit ist im konvektiven Gleichgewicht. Ist nun die Temperatur in der Umgebung des Flüssigkeitsstroms nicht konstant, so könnte ein Entropie- und Energiefluß nach außen einsetzen und die Entropie verringern. Falls jedoch die Relaxationszeit, welche mit der Einstellung dieses Gleichgewichts verbunden ist, groß ist gegenüber den Zeitspannen, welche mit dem Strömen der Flüssigkeit verbunden ist, so wird sich ein thermodynamisches Gleichgewicht nicht einstellen können und der Flüssigkeitsstrom im konvektiven Gleichgewicht bleiben.

Betrachte ich nun ein System im Gravitationsfeld, so ist das thermodynamische Gleichgewicht mit der Bedingung $T/\mu = \text{konstant}$ verknüpft, wie ich zu Beginn der Arbeit gezeigt habe. Dies ist anschaulich mit der Arbeit verknüpft, welche Teilchen bei ihrer Bewegung im Gravitationsfeld zu leisten haben. Eine Entropiedichtedifferenz zwischen zwei Orten kann somit unter Umständen aus energetischen Gründen nicht ausgeglichen werden, da z.B. die vorhandene thermische Energie nicht ausreicht, die Gravitationspotentialdifferenz zu überwinden. Für das konvektive Gleichgewicht gelten die Überlegungen für den freien Fall ebenso im Gravitationsfeld, d.h. aufsteigende oder fallende Flüsse können im konvektiven Gleichgewicht sein, ohne das T/μ im Gesamtsystem konstant ist.

Für die von mir betrachteten stellaren Objekte haben die hier vorgebrachten Überlegungen folgende Konsequenzen: In einem Quark-Gluon-Plasma-Stern im thermody-

namischen Gleichgewicht, umgeben von einem Wärmebad, gibt es keinen Energiefluß. Störungen des Gleichgewichts innerhalb eines kleinen Volumenelements durch statistische Schwankungen werden von den umgebenden, als Wärme- und Teilchenbad wirkenden Volumina ausgeglichen. Die superluminösen Sterne mit Quark-Gluon-Kern besitzen eine Hülle im konvektiven Gleichgewicht, d.h. die spezifische Entropie in der gesamten stellaren Hülle ist konstant. Es gibt daher keine Flüsse und Strömungen in der Hülle. Die Temperatur ist jedoch nicht im Gleichgewicht; aufgrund des Temperaturgradienten existiert ein Energiestrom von innen nach außen. Dieser Energietransport wird von den Photonen bewältigt, die aufgrund ihrer geringen freien Weglänge den Stern nicht verlassen können, aber Energie von einer Schicht zur nächsten transportieren und zwar derart, daß die spezifische Entropie konstant bleibt. Treten nun in einem Volumenelement innerhalb der stellaren Hülle statistische Schwankungen auf, welche lokal zu einer Abweichung vom in der Umgebung konstanten Wert der spezifischen Entropie führen, so werden diese Abweichungen durch Konvektion ausgeglichen, da die Photonen zu kleine freie Weglängen besitzen und folglich die Zeit, welche sie zum Ausgleich des Nichtgleichgewichts benötigen würden, groß ist verglichen mit der Zeitspanne, welche eine konvektive Strömung benötigt. Konvektion ist also innerhalb der für Photonen praktisch undurchdringlichen stellaren Hülle ein weit effektiverer Energietransportmechanismus als Strahlungstransport;

andererseits kann Konvektion nur dann auftreten, wenn eine Abweichung vom konvektiven Gleichgewicht auftritt. Befindet sich ein Stern aber im konvektiven Gleichgewicht, so tritt praktisch keine Konvektion mehr auf und das gesamte System ist stationär.

Die relativen Abweichungen vom Gleichgewicht in einem Thermodynamischen System sind mit der in diesem System vorhandenen Teilchenzahl verknüpft; es gilt $\delta x/x \approx 1/\sqrt{N}$. Je größer die Teilchenzahl, desto kleiner sind die relativen statistischen Schwankungen; bei großen Teilchenzahlen kann daher kein anderer als der Gleichgewichtszustand überhaupt realisiert sein.

12. Literaturverzeichnis

- 1 R. J. Adler, M. J. Bazin, M. Schiffer
Introduction to General Relativity and Gravitation,
McGraw-Hill, New York (1975)
- 2 J. Rafelski, Phys. Reports 88 No.5, 331 (1982)
- 3 A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn,
V. F. Weisskopf, Phys. Rev. D9 , 3471 (1974)
- 4 H.-T. Elze, W. Greiner, J. Rafelski
J. Phys. G.: Nucl. Phys. 6 , L149 (1980)
- 5 O. K. Kalashnikov, V. V. Klimov
Phys. Letters 88 B , 328 (1979)
- 6 T. de Grand, R. L. Jaffe, K. Johnson, Z. Kiskis
Phys. Rev. D12 , 2060 (1975)
- 7 P. Hasenfratz, J. Kuti
Phys. Reports 40 No.2, 75 (1978)
- 8 R. C. Tolman, Phys. Rev. 55, 364 (1939)
- 9 K. K. Harrison, K. S. Thorne, M. Wakano,
J. A. Wheeler
Gravitation Theory and Gravitational Collapse,
Univ. of Chicago Press, Chicago (1965)
- 10 C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler
Gravitation, Freeman, San Francisco (1973)
- 11 M. C. Durgapal, A. K. Pande, P. S. Rawat
Astrophys. and Space Science 90, 117 (1983)
- 12 J. P. Wright, Phys. Rev. 136, B 288 (1964)

- 13 J. Rafelski, M. Danos, Perspectives in High Energy
Nuclear Collisions, US Dept. of Com. (1983)
- 14 J. Rafelski, H.-T. Elze, R. Hagedorn
Cern preprint, TH.2912-Cern
- 15 H.-T. Elze, Dissertation, Frankfurt (1983)
- 16 H. Stöcker, Dissertation, GSI-Report 79-9
- 17 N. J. Baker, P. L. Connolly, S. A. Kahn,
M. J. Murtagh, R. B. Palmer, N. P. Samios, M. Tanaka
Phys. Rev. D 25 , 617 (1982)
- 18 J. R. Oppenheimer, G. M. Volkoff
Phys. Rev. 55 , 374 (1939)
- 19 L. D. Landau, E. M. Lifschitz
Lehrbuch der Theoretischen Physik V
Akademie-Verlag, Berlin (1975)
- 20 W. Scheid, W. Greiner, Z. Physik 226 , 365 (1969)
- 21 J. Hofmann, Dissertation, Frankfurt (1979)
- 22 U. Heinz, Diplom-Arbeit, Frankfurt (1976)
- 23 H. Stöcker, G. Gräbner, J. A. Maruhn, W. Greiner
Phys. Letters 95 B , 192 (1980)
- 24 U. Heinz, W. Greiner, W. Scheid
J.Phys. G: Nucl. Phys. Vol.5, No.10, 1383 (1979)
- 25 G. Buchwald, Diplom-Arbeit, Frankfurt (1980)
- 26 G. Gräbner, Dissertation, Frankfurt (1984)
- 27 R. Hagedorn, J. Rafelski, Cern preprint TH.2947-Cern
- 28 R. Hagedorn, J. Rafelski, Cern preprint TH.2969-Cern
- 29 M. Ruderman, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 10 ,
427 (1972)

- 30 P. Koch-Steinheimer, Diplomarbeit, Frankfurt (1983)
- 31 Ya. B. Zel'dovich, Usp. Fiz. Nauk 95 , 209 (1968)
- 32 A. P. Lightman, W. H. Press, R. H. Price,
S. A. Teukolsky, Problem book in relativity and
gravitation, Princeton univ. press, Princeton,
New Jersey (1975)
- 33 E. R. Harrison, Mon. Not. R. Astr. Soc. 137, 69
(1967)
- 34 B. Kämfer, Zentralinstitut für Kernforschung
Rossendorf, Phys. Lett.
- 35 S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, Wiley,
New York (1972)
- 36 E. R. Hilf, W. Hillebrandt, K. Takahashi, M. F. El
Eid , T. Kodama, Physica Scripta Vol 10A, 132 (1974)
- 37 F. A. Bais, J. Ellis, D. V. Nanopoulos, K. A. Olive
Nuclear Phys. B 219 , 189 (1983)
- 38 S. Dimopoulos, J. Preskill, F. Wilczek
Physics Letters 119 B , 320 (1982)
- 39 E. W. Kolb, S. A. Colgate, J. A. Harvey
Phys. Rev. Letters 49 , 1373 (1982)
- 40 K. A. Olive, D. N. Schramm , Cern preprint ,
TH.3595-Cern (1983)
- 41 C. G. Callan, Nuclear Phys. B 212 , 391 (1983)
- 42 Th. Schmidt-Kaler, J. V. Feitzinger, R136a in 30 Dor
"An Overluminous Supermassive Object" in: Proc. "The
most massive stars", ESO, München (1982)
- 43 A. Unsöld, Der neue Kosmos, Springer, Berlin (1974)

- 44 G. Dautcourt, Relativistische Astrophysik,
Akademie-Verlag, Berlin (1972)
- 45 K. Brecher, G. Caporaso, Nature 259 , 377 (1976)
- 46 B. Freedman, L. McLerran, Phys. Rev. D17, 1109(1978)
- 47 G. Chapline, M. Nauenberg, Ann. New York Academy
of Sciences , 191
- 48 N. Itoh, Prog. Theor. Phys. Vol. 44, 291 (1970)
- 49 J. B. Hartle, Ap. J. 150, 1005 (1967)
- 50 J. B. Hartle, K. S. Thorne, Ap. J. 153, 807 (1968)
- 51 R. Schmalz, Diplomarbeit, Erlangen (1976)

Lebenslauf

Ich wurde am 2. Oktober 1956 als erstes von drei Kindern der Versicherungskaufleute Werner Schmidt und Elisabeth Schmidt, geb. Keber, in Frankfurt am Main geboren. Von April 1963 bis November 1966 besuchte ich die Volksschule in Hattersheim am Main, anschließend das Leibniz-Gymnasium in Frankfurt-Höchst; dort legte ich im Mai 1975 die Reifeprüfung im naturwissenschaftlichen Zweig ab. Im Wintersemester 1975 begann ich an der Johann Wolfgang Goethe-Universität mit dem Studium der Physik. Im Juni 1976 heiratete ich Karin Schmidt-Röschlau, geb. Röschlau. In Juli 1976 legte ich die Diplom-Vorprüfung in Physik ab und begann im Institut für Theoretische Physik bei Herrn Prof. Dr. W. Greiner mit dem Anfertigen meiner Diplomarbeit über: Stabilität großer Massen in einer neuen Skalar-Tensor-Theorie. Am 27. November 1979 bestand ich die Diplom-Hauptprüfung und bin seit Januar 1980 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik der Johann Wolfgang Goethe-Universität und arbeite unter der Betreuung von Prof. Dr. W. Greiner und Prof. Dr. J. Rafelski an meiner Dissertation.

Meine akademischen Lehrer waren:

Prof. Dr. W. Greiner, Prof. Dr. B. Müller, Prof. Dr. J. Rafelski, Prof. Dr. J. Maruhn, Prof. Dr. W. Kegel, Prof. Dr. K. Bethge, Prof. Dr. G. Mauck, Prof. Dr. F. Constantinescu, Prof. Dr. L. Hirst, Dr. J. Hofmann, Dr. G. Soff, Dr. Troltenier, Dr. H. Stock, Dr. H.-J. Fink, Dr. B. Fink, Prof. Dr. E. Mohler, Prof. Dr. P. Junior, Prof. Dr. W. Martienssen, Prof. Dr. U. Gerhardt, Prof. Dr. A. Schaarschmidt, Dr. Hoenig, Dr. Th. Schmidt, Dr. U. Schroeder, Prof. Dr. F. Stummel, Dr. K. Hainer, Dr. K.-H. Müller, Dr. J. Reinhardt, Dr. O. Ludwig, Prof. Dr. W. Schwarz, Dr. Keim, Prof. Dr. tom Dieck, Prof. Dr. Doiwa, Prof. Dr. H. Hartmann, Prof. Dr. H. Kessler, Prof. Dr. Roesky.

Danksagung

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Walter Greiner, danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und sein großes Interesse an ihrem Fortgang.

Herrn Prof. Dr. J. Rafelski danke ich für seine Betreuung und die in zahlreichen Diskussionen erlangten Erkenntnisse, welche zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Dank schulde ich auch Herrn Prof. Dr. Berndt Müller und Hans-Thomas Elze für viele wertvolle Hinweise und Diskussionen.

Ebenso danke ich meinen Kollegen am Institut für Theoretische Physik, besonders Frau Dr. Nagwa Abou el Naga und Frau Hannelore Heinz sowie den Herren Mark Uhlig und Karl-Heinz Ziegenhain für die langjährige freundschaftliche Zusammenarbeit.

Frau B. Utschig danke ich für das sorgfältige Zeichnen der Figuren und Herrn P. Holzmann für den Druck der Arbeit.

